

UNIVERSIDAD NACIONAL DE QUILMES
DEPARTAMENTO DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MATEMÁTICA AVANZADA

UNIDAD 1 ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

1. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n con coeficientes constantes.
2. Base de soluciones de la ecuación homogénea.
3. Método de los coeficientes indeterminados para la ecuación no homogénea.
4. Modelización de sistemas mecánicos y eléctricos.
5. Estabilidad interna. Criterio de Routh-Hurwitz. Entrada armónica y función de transferencia.
6. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
7. Sistemas homogéneos: autovalores y autovectores. Base de Jordan.
8. Sistemas no homogéneos.
9. Estabilidad interna de sistemas.
10. Concepto de salida lineal y ecuación de una salida. Parámetros de Markov.
11. Estudio geométrico de los sistemas homogéneos 2×2 . Plano de las fases.
12. Ejemplos de sistemas no lineales.
13. Apéndice. Criterio general de Routh.
14. Apéndice. Cuestiones de energía.

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

Estudiaremos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$
Si $a_0 \neq 0$ decimos que es de orden n .

La función $f(t)$ se llama **entrada o acción externa**.

Si $f(t) = 0$ la ecuación se llama **homogénea**.

Usando el operador lineal $\mathcal{L}(x) = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x$ la ecuación se escribe sencillamente $\mathcal{L}(x) = f(t)$.

Ejemplo 1

Consideremos la ecuación de primer orden $x' + x = t$.

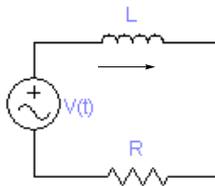
a) $x(t) = t - 1 + k e^{-t}$ es solución para cada valor de k pues $x'(t) + x(t) = (1 - k e^{-t}) + (t - 1 + k e^{-t}) = t$

b) Si imponemos la condición inicial $x(0) = 0$ la solución es $x(t) = t - 1 + e^{-t}$.

Algunos sistemas físicos se modelan con ecuaciones de este tipo en cuyo caso $\mathcal{L}(x) = f(t)$ simula matemáticamente el sistema físico y $f(t)$ es la acción externa sobre el sistema. Veamos dos ejemplos sencillos.

Ejemplo 2

Considere un circuito en serie LR con un voltaje de entrada $V(t)$. Por las leyes de la electricidad la corriente generada $i(t)$ verifica la ecuación de primer orden $L i' + R i = V(t)$. Las soluciones representan las posibles corrientes en el circuito y una de ellas se individualiza dando la corriente inicial $i(0)$.

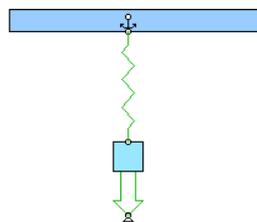


Ejemplo 3

Un sistema mecánico consiste en una masa colgante m que está unida a un resorte de constante k y se ejerce sobre la masa una fuerza vertical $f(t)$ como muestra el esquema. No hay roce y el movimiento es vertical.

La posición de la masa x desde una posición de equilibrio verifica la ecuación de segundo orden $m x'' + k x = f(t)$.

Si se conocen la posición $x(0)$ y velocidad $x'(0)$ iniciales la solución representa el movimiento de la masa $x(t)$.



Demostremos primero que estas ecuaciones tienen infinitas soluciones y que, imponiendo condiciones iniciales, se puede especificar la solución de interés. Luego veremos métodos para encontrar las soluciones.

Teorema 1 “Existencia y unicidad”

Sea $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$ una ecuación diferencial lineal de orden n con coeficientes constantes, reales o complejos, t_0 un tiempo inicial y $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$ n condiciones iniciales.

Si $f(t)$ es una función seccionalmente continua en el intervalo (α, β) y $\alpha < t_0 < \beta$ entonces existe una única solución $x(t)$ de la ecuación definida en todo el intervalo (α, β) con las primeras $n - 1$ derivadas continuas y la derivada n seccionalmente continua que verifica las condiciones iniciales $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0', \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$.

Si $f(t)$ es continua entonces $x(t)$ tiene n derivadas continuas.

Si $f(t)$ tiene k derivadas continuas entonces $x(t)$ tiene $n + k$ derivadas continuas.

Demostración

Dividiendo por a_0 suponemos que la ecuación es mónica:

Orden 1 $x' + a x = f(t), x(t_0) = x_0$.

1) Buscamos primero las soluciones de la ecuación homogénea $x' + a x = 0$.

Separando variables se tiene $\frac{dx}{x} = -a dt$ e integrando queda $x(t) = c e^{-at}$ donde c es una constante.

Reemplazándola en la ecuación se comprueba que es solución para cada constante c real o compleja. Veamos que son todas. En efecto, si $x_1(t)$ es una solución entonces la función $x_1(t) e^{at}$ tiene derivada nula pues

$$\partial_t(x_1(t) e^{at}) = x_1'(t) e^{at} + a x_1(t) e^{at} = (x_1'(t) + a x_1(t)) e^{at} = 0$$

Por el teorema del valor medio del cálculo, es constante: $x_1(t) e^{at} = k$ y entonces $x_1(t) = k e^{-at}$.

2) Buscamos una solución particular de la no homogénea.

Proponemos una solución de la forma $x_p(t) = c(t) e^{-at}$ y la reemplazamos en la ecuación

$$c'(t) e^{-at} - a c(t) e^{-at} + a c(t) e^{-at} = f(t)$$

Simplificando y despejando obtenemos $c'(t) = e^{at} f(t)$ y entonces $c(t) = \int_0^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau$

Luego una solución particular es $x_p(t) = \left(\int_0^t e^{a\tau} f(\tau) d\tau \right) e^{-at}$ y verifica $x_p(t_0) = 0$.

Si $f(t)$ es seccionalmente continua, entonces $c(t)$ es continua y, por el teorema fundamental del cálculo, en cada punto de continuidad de $f(t)$ tiene derivada $c'(t) = e^{at} f(t)$. Luego $x(t)$ es continua con

derivada seccionalmente continua, con saltos justamente en los saltos de $f(t)$.

Si $f(t)$ es continua, $c(t)$ tiene derivada continua, y por ello $x(t)$ tiene derivada continua.

Si $f(t)$ tiene k derivadas continuas, $c(t)$ tiene $n + k$ derivadas continuas y $x(t)$ también.

3) La suma $x(t) = x_p(t) + k e^{-at}$ es otra solución de la ecuación no homogénea con $x(t_0) = k e^{-at_0}$.
Elegiendo $k = x_0 e^{at_0}$ queda $x(t_0) = x_0$ y obtenemos una solución en las condiciones del enunciado.

4) Es única pues, si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones, la resta $x(t) = x_1(t) - x_2(t)$ es solución de la homogénea $x' + ax = 0$ que verifica $x(t_0) = 0$. Luego $x(t) = k e^{-at}$ y necesariamente $k = 0$.
Por lo tanto $x_1(t) = x_2(t)$.

Orden 2 $x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$ y $x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_0'$

Reducimos el orden de la ecuación introduciendo la variable $y = x' + \beta x$:

$$y' + \beta_1 y = x'' + \beta x' + \beta_1 (x' + \beta x) = x'' + (\beta + \beta_1) x' + \beta \beta_1 x$$

Elegimos los números β y β_1 para que $\beta + \beta_1 = a_1$ y $\beta \beta_1 = a_2$. Este sistema nos lleva a la ecuación

$$\beta^2 - a_1 \beta + a_2 = 0$$

Elegida una raíz β determinamos β_1 mediante $\beta_1 = a_1 - \beta$. Entonces y verifica

$$y' + \beta_1 y = f(t), \quad y(t_0) = x_0' + \beta x_0$$

Por el caso 1, hay una única solución $y(t)$ en las condiciones especificadas. Para x queda la ecuación

$$x' + \beta x = y(t), \quad x(t_0) = x_0$$

que nuevamente tiene solución. Esta es la solución de la ecuación original pues, derivando queda

$$x'' + \beta x' = y'(t) = -\beta_1 y(t) + f(t) = -(a_1 - \beta)(x' + \beta x) + f(t) \Rightarrow x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t)$$

$$y \quad x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = -\beta x(t_0) + y(t_0) = -\beta x_0 + x_0' + \beta x_0 = x_0'$$

Aplicando el caso 1 obtenemos:

si $f(t)$ es seccionalmente continua, $y(t)$ es continua y tiene derivada seccionalmente continua, y entonces $x(t)$ tiene derivada continua y derivada segunda seccionalmente continua;

si $f(t)$ es continua, $y(t)$ tiene derivada continua, y entonces $x(t)$ tiene derivada segunda continua;

si $f(t)$ tiene k derivadas continuas, $y(t)$ tiene $k + 1$ derivadas continuas y $x(t)$ tiene $k + 2$ derivadas continuas.

Unicidad

Si $x(t)$ es la resta de dos soluciones verifica la ecuación homogénea con condiciones iniciales nulas.

Por lo tanto la $y(t)$ correspondiente es nula y por ende $x(t)$ es nula.

Orden n $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(x)$ y $x(t_0) = x_0, \dots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$

Hacemos inducción siguiendo los lineamientos del caso anterior.

Bajamos el orden introduciendo la nueva variable $y = x' + \beta x$

$$y^{(n-1)} + \beta_1 y^{(n-2)} + \dots + \beta_{n-1} y = x^{(n)} - \beta x^{(n-1)} + \beta_1 (x^{(n-1)} - \beta x^{(n-2)}) + \dots + \beta_{n-1} (x' - \beta x)$$

$$= x^{(n)} + (\beta + \beta_1) x^{(n-1)} + (\beta \beta_1 + \beta_2) x^{(n-2)} \dots + (\beta \beta_{n-2} + \beta_{n-1}) x' + \beta \beta_{n-1} x$$

Elegimos $\beta, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ tales que $\beta + \beta_1 = a_1, \beta \beta_1 + \beta_2 = a_2, \dots, \beta \beta_{n-2} + \beta_{n-1} = a_{n-1}$ y $\beta \beta_{n-1} = a_n$

Este sistema nos lleva a la ecuación

$$\beta^n - a_1 \beta^{n-1} + a_2 \beta^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} a_{n-1} \beta + (-1)^n a_n = 0$$

Eligiendo una raíz β determinamos iterativamente $\beta_1 = a_1 - \beta, \beta_2 = a_2 - \beta \beta_1, \dots, \beta_{n-1} = a_{n-1} - \beta \beta_{n-2} \beta$.

Con esta elección la incógnita y verifica la siguiente ecuación de orden $n - 1$

$$y^{(n-1)} + \beta_1 y^{(n-2)} + \dots + \beta_{n-1} y = f(t), \quad y(t_0) = x_0' + \beta x_0, \dots, y^{(n-2)}(t_0) = x_0^{(n-1)} + \beta x_0^{(n-2)}$$

Por hipótesis inductiva hay una única solución $y(t)$ en las condiciones especificadas en el enunciado y x verifica la ecuación de primer orden

$$a_0 x' + \alpha x = y(t), \quad x(t_0) = x_0$$

que nuevamente tiene solución. Derivando $n - 1$ veces se comprueba como en el caso anterior que es la solución de la ecuación original y que verifica las condiciones iniciales.

Si $f(t)$ es seccionalmente continua, la solución $y(t)$, por hipótesis inductiva, tiene las primeras $n - 2$ derivadas continuas y la derivada $n - 1$ seccionalmente continua. Entonces $x(t)$ tiene las primeras $n - 1$ derivadas continuas y la derivada n seccionalmente continua.

Si $f(t)$ es continua, la solución $y(t)$, por hipótesis inductiva, tiene las primeras $n - 1$ derivadas continuas, y entonces $x(t)$ tiene n derivadas continuas.

Si $f(t)$ tiene k derivadas continuas, la solución $y(t)$, por hipótesis inductiva, tiene las primeras $n - 1 + k$ derivadas continuas y entonces $x(t)$ tiene $n + k$ derivadas continuas.

Para la unicidad, consideramos la resta de dos soluciones, que es una solución de la ecuación homogénea con condiciones iniciales nulas. Por la hipótesis inductiva, la $y(t)$ correspondiente es nula y por ende $x(t)$ es nula.

q.e.d.

Ejercicio

Resolver las siguientes ecuaciones utilizando el método de la demostración del teorema para orden 1

$$W(u_1, \dots, u_n)(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \dots & u_n(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) & \dots & u_n'(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1^{(n-1)}(t) & u_2^{(n-1)}(t) & \dots & u_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Fijado t_0 y condiciones iniciales $x_0, x_0', \dots, x_0^{(n-1)}$, por el teorema existe una única solución que las verifica

$$W(u_1, \dots, u_n)(t_0) \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dots \\ x^{(n-1)}(t_0) \end{pmatrix}$$

y entonces el Wronskiano $W(u_1, \dots, u_n)(t_0)$ es invertible, o equivalentemente, $\det W(u_1, \dots, u_n)(t_0) \neq 0$.

2. Sobre la ecuación no homogénea.

Si $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación $\mathcal{L}(x) = f(t)$ y $u_1(t), \dots, u_n(t)$ es una base de soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(x) = 0$ todas las soluciones de $\mathcal{L}(x) = f(t)$ están dadas por

$$x(t) = x_p(t) + \sum_{i=1}^n c_i u_i(t)$$

y dependen de n parámetros c_1, \dots, c_n que se pueden determinar con n condiciones iniciales.

En efecto: sea $x_1(t)$ otra solución: $\mathcal{L}(x_1) = f(t)$. Restando $\mathcal{L}(x_1) = f$ y $\mathcal{L}(x_p) = f$ resulta $\mathcal{L}(x_1) - \mathcal{L}(x_p) = \mathcal{L}(x_1 - x_p) = 0$ y entonces $x_0(t) = x_1(t) - x_p(t)$ es solución de la homogénea.

Como se vio en el apartado 1, n condiciones iniciales determinan una única solución de la homogénea.

3. Sobre la ecuación real y entrada compleja.

Sea $\mathcal{L}(x) = F(t)$ una ecuación con coeficientes reales y $F(t) = f_1(t) + i f_2(t)$ una entrada compleja.

Si $X(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ es una solución compleja

$$\mathcal{L}(x_1(t) + i x_2(t)) = \mathcal{L}(x_1(t)) + i \mathcal{L}(x_2(t)) = f_1(t) + i f_2(t)$$

igualando la parte real y compleja obtenemos $\mathcal{L}(x_1(t)) = f_1(t)$ y $\mathcal{L}(x_2(t)) = f_2(t)$.

En particular, si $X(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ es una solución de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(X) = 0$, la parte real y la parte imaginaria también lo son $\mathcal{L}(x_1(t)) = \mathcal{L}(x_2(t)) = 0$.

Ejemplo 1 Es claro que $x'' + 4x = 0$ tiene la solución compleja $e^{2it} = \cos 2t + i \sin 2t$ y entonces $\cos 2t$ y $\sin 2t$ son dos soluciones reales.

Ejemplo 2 Comprobar que $x'' + 2x' + 2x = 0$ tiene la solución $e^{(-1+i)t} = e^{-t} \cos t + i e^{-t} \sin t$ y entonces $e^{-t} \cos t$ y $e^{-t} \sin t$ son dos soluciones reales.

Ejemplo 3 $x' + x = e^{it}$ tiene la solución $\frac{1-i}{2} e^{it} = \frac{1}{2} (\cos t + \sin t) + i \frac{1}{2} (\sin t - \cos t)$

Por lo tanto $\frac{1}{2} (\cos t + \sin t)$ es solución de $x' + x = \cos t$ y
 $\frac{1}{2} (\sin t - \cos t)$ es solución de $x' + x = \sin t$.

En las dos secciones siguientes estudiaremos métodos prácticos para hallar las soluciones.

Base de soluciones exponenciales de la ecuación homogénea

Para encontrar una base explícita de soluciones de la ecuación homogénea usamos el método de Euler, que consiste en buscar soluciones de tipo exponencial $x(t) = e^{\lambda t}$.

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t}) = (a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n) e^{\lambda t} = 0$$

Luego $e^{\lambda t}$ es solución si el exponente λ es raíz de la llamada "ecuación característica"

$$c(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0$$

Caso 1 Tres raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, reales o complejas.

Veamos que las soluciones $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, e^{\lambda_3 t}$ forman una base para lo cual basta ver que son linealmente independientes pues el espacio vectorial de soluciones tiene dimensión 3. Sea

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} = 0$$

cuya derivada es $\alpha_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 \lambda_3 e^{\lambda_3 t} = 0$

y su derivada segunda $\alpha_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 t} + \alpha_3 \lambda_3^2 e^{\lambda_3 t} = 0$

Evaluando en $t = 0$ obtenemos tres ecuaciones lineales homogéneas con tres incógnitas

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_3 \lambda_3 = 0 \\ \alpha_1 \lambda_1^2 + \alpha_2 \lambda_2^2 + \alpha_3 \lambda_3^2 = 0 \end{cases}$$

cuyo determinante es un determinante de Vandermonde

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2) \neq 0$$

por lo tanto la única solución del sistema es la trivial: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

Ejemplo 1 $x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 0$ tiene las raíces características reales $-1, -2, -3$.
Luego todas sus soluciones son $x_h(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 e^{-2t} + \alpha_3 e^{-3t}$

Ejemplo 2 $x''' + x'' + x' + x = 0$ tiene las raíces características $-1, i$ y $-i$.
Una base de soluciones es e^{-t}, e^{it}, e^{-it} y una base real es $e^{-t}, \cos t, \sin t$.
Todas las soluciones son $x_0(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 \cos t + \alpha_3 \sin t$.

La que verifica $x(0) = -1, x'(0) = 1, x''(0) = 0$ es $x_0(t) = -\frac{1}{2} e^{-t} - \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \sin t$

Ejemplo 3 Consideremos la ecuación $x''' + 2x'' + x' + x = 0$

Resolvemos la ecuación característica en forma numérica.

`NSolve[u3 + 2 u2 + u + 1 == 0, u]`

`{{u → -1.75488}, {u → -0.122561 - 0.744862 i}, {u → -0.122561 + 0.744862 i}}`

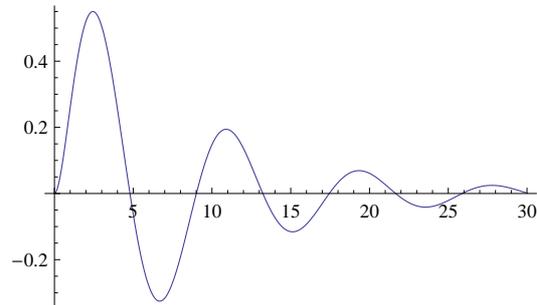
Las soluciones aproximadas de la ecuación homogénea son

$$x_h(t) = \alpha_1 e^{-1.75t} + \alpha_2 e^{-0.12t} \cos 0.74t + \alpha_3 e^{-0.12t} \sin 0.74t$$

Encontramos numéricamente y graficamos la solución que cumple las condiciones iniciales

$$x(0) = 0, x'(0) = 0, x''(0) = 1$$

```
s = NDSolve [
  {x''''[t] + 2 x'''[t] + x'[t] + x[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 0, x''[0] == 1}, x, {t, 0, 30}];
Plot[Evaluate[x[t] /. s], {t, 0, 30}]
```



Para estudiar el caso de raíces repetidas usamos los siguientes desarrollos.

Las tres primeras derivadas de la función $p(t) e^{\alpha t}$ son

$$\begin{aligned}(p(t) e^{\alpha t})' &= (p' + \alpha p) e^{\alpha t} \\ (p(t) e^{\alpha t})'' &= (p'' + 2\alpha p' + \alpha^2 p) e^{\alpha t} \\ (p(t) e^{\alpha t})''' &= (p''' + 3p''\alpha + 3p'\alpha^2 + p\alpha^3) e^{\alpha t}\end{aligned}$$

Aplicando el operador $\mathcal{L}(x) = a_0 x''' + a_1 x'' + a_2 x' + a_3 x$ y acomodando términos se tiene

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(p(t) e^{\alpha t}) &= \{a_0 [p''' + 3p''\alpha + 3p'\alpha^2 + p\alpha^3] + a_1 [p'' + 2\alpha p' + \alpha^2 p] + a_2 [p' + \alpha p] + a_3 p\} e^{\alpha t} \\ &= \{a_0 p''' + (3a_0\alpha + a_1) p'' + (3a_0\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2) p' + (a_0\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) p\} e^{\alpha t} \\ &= \left\{ \frac{1}{3!} c'''(\alpha) p''' + \frac{1}{2!} c''(\alpha) p'' + \frac{1}{1!} c'(\alpha) p' + \frac{1}{0!} c(\alpha) p \right\} e^{\alpha t}\end{aligned}$$

Hemos obtenido la fórmula

$$\mathcal{L}(p(t) e^{\alpha t}) = \left\{ \frac{1}{3!} c'''(\alpha) p'''(t) + \frac{1}{2!} c''(\alpha) p''(t) + \frac{1}{1!} c'(\alpha) p'(t) + \frac{1}{0!} c(\alpha) p(t) \right\} e^{\alpha t}$$

Caso 2 La ecuación característica tiene una raíz doble $\lambda_1 = \lambda_2$ y una simple λ_3 .

Luego $c(\lambda_1) = c'(\lambda_1) = 0$ y $c''(\lambda_1) \neq 0$ y por la fórmula anterior se deduce que tanto $e^{\lambda_1 t}$ como $t e^{\lambda_1 t}$ son soluciones de la ecuación homogénea. Entonces tenemos las tres soluciones $e^{\lambda_1 t}$, $t e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_3 t}$ y son linealmente independientes pues si $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t} + \alpha_3 e^{\lambda_3 t} = 0$

multiplicando por $e^{-\lambda_1 t}$ queda $\alpha_1 + \alpha_2 t = -\alpha_3 e^{\mu t}$ donde $\mu = \lambda_3 - \lambda_1 \neq 0$.

Derivando 2 veces obtenemos $0 = -\alpha_3 \mu^2 e^{\mu t}$ lo cual implica $\alpha_3 = 0$. Luego $\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t} = 0$ y evaluando en $t = 0$ se obtiene $\alpha_1 = 0$ y queda $\alpha_2 t e^{\lambda_1 t} = 0$ lo cual implica $\alpha_2 = 0$.

Ejemplo 4

Las raíces características para $x''' + 7x'' + 16x' + 12x = 0$ son -2 doble y -3 simple.

```
NSolve[u3 + 7 u2 + 16 u + 12 == 0, u]
```

```
{{u -> -3.}, {u -> -2.}, {u -> -2.}}
```

Las soluciones de la ecuación homogénea son $x_0(t) = (\alpha_1 + \alpha_2 t) e^{-2t} + \alpha_3 e^{-3t}$

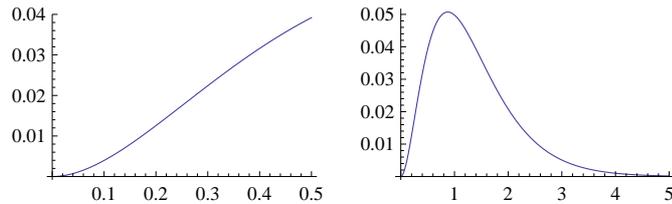
La solución que verifica $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$ es $-e^{-2t} + t e^{-2t} + e^{-3t}$.

Las gráficas cerca de 0 y en un intervalo más amplio son las siguientes.

```
g1 = Plot[e-3t - e-2t + t e-2t, {t, 0, 0.5}];
```

```
g2 = Plot[e-3t - e-2t + t e-2t, {t, 0, 5}];
```

```
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
```



En el primer gráfico se aprecia la suavidad cerca de 0 y ello por ser la derivada nula.

Caso 3 La ecuación característica tiene una única raíz triple $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$.

Entonces $c(\lambda_1) = c'(\lambda_1) = c''(\lambda_1) = 0$ y $c'''(\lambda_1) \neq 0$ y por la fórmula anterior se ve que

$e^{\lambda_1 t}$, $t e^{\lambda_1 t}$ y $t^2 e^{\lambda_1 t}$ son soluciones de la ecuación. Son linealmente independientes pues si

$\alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t} + \alpha_3 t^2 e^{\lambda_1 t} = 0$, multiplicando por $e^{-\lambda_1 t}$ queda $\alpha_1 + \alpha_2 t + \alpha_3 t^2 = 0$ lo cual

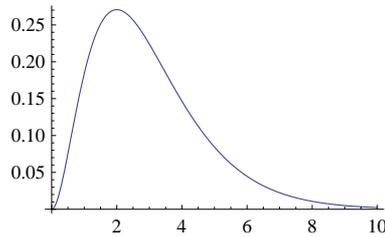
obliga a que $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Luego todas las soluciones son $x(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \alpha_2 t e^{\lambda_1 t} + \alpha_3 t^2 e^{\lambda_1 t}$.

Ejemplo La ecuación $x''' + 3x'' + 3x' + x = 0$ tiene a -1 como raíz característica triple.

Luego todas las soluciones son $x(t) = \alpha_1 e^{-t} + \alpha_2 t e^{-t} + \alpha_3 t^2 e^{-t}$

Encontramos numéricamente la solución que cumple $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$ y la graficamos.

```
s1 = NDSolve[{x'''[t] + 3 x''[t] + 3 x'[t] + x[t] == 0, x[0] == 0, x'[0] == 0,
             x''[0] == 1}, x, {t, 0, 10}];
Plot[Evaluate[x[t] /. s1], {t, 0, 10}]
```



Ecuación general

Para una ecuación de orden n se generalizan en forma natural los resultados anteriores. Se tiene la fórmula general

$$\mathcal{L}(p(t) e^{\alpha t}) = \left\{ \sum_{h=0}^n \frac{1}{h!} c^{(h)}(\alpha) p^{(h)}(t) \right\} e^{\alpha t}$$

Si λ es una raíz característica de multiplicidad $k \geq 1$, entonces $c(\lambda) = c'(\lambda) = \dots = c^{(k-1)}(\lambda) = 0$; si además $p(t)$ es un polinomio de grado $\leq k-1$ entonces $p^{(h)}(t) = 0$ para $h \geq k$ y por la fórmula $\mathcal{L}(p(t) e^{\alpha t}) = 0$. Luego $t^r e^{\lambda t}$, $0 \leq r \leq k-1$, son soluciones de la ecuación homogénea.

Como hay n raíces características contadas con su multiplicidad, hay n soluciones de la forma $t^r e^{\lambda t}$.

El siguiente lema prueba que estas funciones son linealmente independientes y entonces forman una base.

Lema Sean $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ números distintos, reales o complejos. Si $p_1(t), \dots, p_r(t)$ son polinomios tales que $p_1(t) e^{\alpha_1 t} + \dots + p_r(t) e^{\alpha_r t} = 0$ entonces $p_1(t) = \dots = p_r(t) = 0$.

Demostración

Inducción sobre r . Si $r = 1$ se tiene $p_1(t) e^{\alpha_1 t} = 0$ lo cual obliga a $p_1(t) = 0$ pues la exponencial nunca es cero.

Supongamos que vale hasta $r-1$ y sea $p_1(t) e^{\alpha_1 t} + p_2(t) e^{\alpha_2 t} + \dots + p_r(t) e^{\alpha_r t} = 0$. Multiplicando por $e^{-\alpha_1 t}$ y haciendo $\lambda_i = \alpha_i - \alpha_1 \neq 0$ queda

$$p_1(t) + p_2(t) e^{\lambda_2 t} + \dots + p_r(t) e^{\lambda_r t} = 0$$

Si $p_1(t) = 0$ por hipótesis inductiva $p_2(t) = \dots = p_r(t) = 0$.

Si fuera $p_1(t) \neq 0$ llegaremos a una contradicción. Si su grado es $k-1$ derivamos la igualdad k veces obteniendo

$$T_2(p_2(t)) e^{\lambda_2 t} + \dots + T_r(p_r(t)) e^{\lambda_r t} = 0$$

donde

$$T_i(p_i(t)) = p_i^{(k)}(t) + \binom{k}{1} p_i^{(k-1)}(t) \lambda_i + \dots + \binom{k}{k-1} p_i'(t) \lambda_i^{k-1} + p_i(t) \lambda_i^k$$

es una transformación lineal $T_i : \mathbb{P}[t] \rightarrow \mathbb{P}[t]$ con núcleo nulo pues λ_i es no nulo.

Por hipótesis inductiva $T_i(p_i(t)) = 0$ y por lo tanto $p_i(t) = 0$ para $i = 2, \dots, r$.

Luego queda $p_1(t) e^{\alpha_1 t} = 0$ y por $r = 1$ es $p_1(t) = 0$ lo cual no es cierto.

q.e.d.

Teorema 2 Sea $a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = 0$ una ecuación homogénea de orden n . Si la ecuación característica tiene las raíces $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ distintas con multiplicidades respectivas $k_1, \dots, k_s : k_1 + \dots + k_s = n$ entonces una base de soluciones es $t^r e^{\lambda_i t} : 0 \leq r < k_i, i = 1, \dots, s$.

Ejercicio

Considere la ecuación $x'' + 2x' + 2x = 0$.

- Halle la solución que verifica $x(0) = 0, x'(0) = 1$
- Halle la solución que verifica $x(\pi) = 0, x'(\pi) = 1$
- ¿ Puede hallar una solución que verifique $x(0) = 1, x'(\pi) = 0$?
¿ Puede hallar una solución que verifique $x(0) = 1, x(\pi) = 0$?

Muestre las gráficas de cada solución obtenida.

Ejercicio

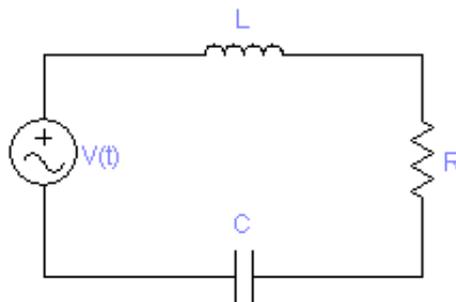
Considere el circuito en serie RLC con $C = \frac{1}{2} F, L = 1 H, R = 3 \Omega$ y $V(t) = 0$.

- Inicialmente no hay corriente y el capacitor tiene el voltaje $v_C(0) = 1 V$.

Verifique que la corriente es $i(t) = -e^{-t} + e^{-2t}$.

Describa físicamente esta solución utilizando una gráfica de la misma.

- Halle la corriente si $i(0) = 1 A, v_C(0) = 0 V$.

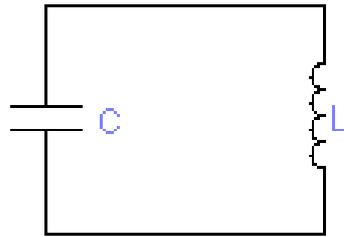


Ejercicio

Considere un circuito en serie LC con $C = 20 \mu F, L = 80 \mu H$. ($\mu = \text{micro} = 10^{-6}$)

Inicialmente no hay corriente y el capacitor tiene el voltaje $v_C(0) = 110 V$.

Calcule la corriente generada, su período y frecuencia en Hertz.



Rta. $i(t) = -55 \text{ sen}(25\,000 t)$, período $\frac{2\pi}{25\,000} \approx 0.00025$, $\frac{25\,000}{2\pi} \approx 3978.87$ Hertz

Método de los coeficientes indeterminados para resolver la ecuación no homogénea

Consideremos la ecuación no homogénea $\mathcal{L}(x) = q(t) e^{\alpha t}$ con $q(t)$ polinomio de grado m y α un número real o complejo Buscamos soluciones particulares del mismo tipo $p(t) e^{\alpha t}$ con $p(t)$ polinomio. Como los coeficientes del polinomio $p(t)$ son indeterminados, de ahí resulta el nombre del método.

Para entender el caso general consideremos primero una ecuación de orden 3. Se tiene

$$\mathcal{L}[p(t) e^{\alpha t}] = \left\{ \frac{1}{3!} c'''(\alpha) p''' + \frac{1}{2!} c''(\alpha) p'' + c'(\alpha) p' + c(\alpha) p \right\} e^{\alpha t}$$

y sea $T : \mathbb{P}[t] \rightarrow \mathbb{P}[t]$ la transformación lineal en el espacio de polinomios dada por

$$T[p] = \frac{1}{3!} c'''(\alpha) p''' + \frac{1}{2!} c''(\alpha) p'' + c'(\alpha) p' + c(\alpha) p$$

Caso 1 α no es raíz característica $c(\alpha) \neq 0$.

Se tiene $T : \mathbb{P}_m[t] \rightarrow \mathbb{P}_m[t]$. Dado p no nulo como $c(\alpha) \neq 0$ el polinomio $T(p)$ tiene el mismo grado que p y por lo tanto es no nulo. Luego T es un isomorfismo y por ello dado un polinomio $q(t)$ de grado m existe un único polinomio $p(t)$ de grado m tal que $T[p] = q$ y por lo tanto $\mathcal{L}[p(t) e^{\alpha t}] = q(t) e^{\alpha t}$.

Caso 2 α es una raíz simple de la ecuación característica $c(\alpha) = 0, c'(\alpha) \neq 0$.

Entonces $T : \mathbb{P}_{m+1}(t) \rightarrow \mathbb{P}_m(t)$. Su núcleo es igual a los polinomios constantes que es un subespacio de dimensión 1 y como $\dim N(T) + \dim \text{Im}(T) = \dim \mathbb{P}_{m+1}(t)$ resulta que la imagen es todo $\mathbb{P}_m(t)$. Luego dado un polinomio $q(t)$ de grado m existe un único polinomio $p(t)$ de grado m tal que

$T(t p(t)) = q(t)$. y entonces $\mathcal{L}[t p(t) e^{\alpha t}] = q(t) e^{\alpha t}$.

Caso general Sea α una raíz de multiplicidad r : $c(\alpha) = c'(\alpha) = 0 = \dots = c^{(r-1)}(\alpha) = 0$, $c^{(r)}(\alpha) \neq 0$. Consideremos la fórmula general y la transformación lineal asociada

$$\mathcal{L}(p(t) e^{\alpha t}) = \left\{ \sum_{h=r}^n \frac{1}{h!} c^{(h)}(\alpha) p^{(h)}(t) \right\} e^{\alpha t} \quad \text{y} \quad T: \mathbb{P}_{m+r}(t) \rightarrow \mathbb{P}_m(t), \quad T(p) = \sum_{h=r}^n \frac{1}{h!} c^{(h)}(\alpha) p^{(h)}(t)$$

El núcleo de T son los polinomios de grado $\leq r-1$ y tiene dimensión r y por lo tanto la imagen de T es todo $\mathbb{P}_m(t)$. Luego dado un polinomio $q(t)$ de grado m existe un polinomio $p_1(t)$ de grado $m+r$ tal que $T(p_1(t)) = q(t)$. Escribimos $p_1(t) = (a_0 + a_1 t + \dots + a_{r-1} t^{r-1}) + t^r p(t)$ donde $p(t)$ es de grado m . Como $a_0 + a_1 t + \dots + a_{r-1} t^{r-1}$ está en el núcleo de T se tiene $T(t^r p(t)) = q(t)$ y por ende

$$\mathcal{L}[t^r p(t) e^{\alpha t}] = q(t) e^{\alpha t}$$

Es único pues si $T(t^r \hat{p}(t)) = q(t)$ entonces $0 = T(t^r \hat{p}(t)) - T(t^r p(t)) = T(t^r (\hat{p}(t) - p(t)))$.

Si el polinomio $\hat{p}(t) - p(t)$ fuera no nulo $t^r (\hat{p}(t) - p(t))$ tendría grado $\geq r$ y estaría en el núcleo lo cual no puede ser. Por lo tanto $\hat{p}(t) = p(t)$. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 3

Sea $\mathcal{L}(x) = q(t) e^{\alpha t}$ una ecuación lineal a coeficientes constantes donde $q(t)$ es un polinomio de grado m . Si α es raíz de la ecuación característica de multiplicidad $k \geq 0$ entonces existe una única solución particular de la forma $p(t) t^k e^{\alpha t}$ donde $p(t)$ es un polinomio de grado m .

Nota

En el teorema anterior, si $k = 0$ significa que α no es raíz característica de la ecuación.

Si $k \geq 1$ significa que α es raíz característica y entonces el grado del polinomio en la solución $t^k p(t)$ es mayor que el grado en la entrada $q(t)$. Decimos que esa entrada produce resonancia en el sistema.

Ejemplo 1

Sea la ecuación $x''' + 7x'' + 16x' + 12x = (1-t)e^{-t}$

El polinomio característico $c(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12$ tiene -3 raíz simple y -2 raíz doble.

Luego -1 no es raíz característica, y se puede proponer como solución particular $x(t) = (a + bt)e^{-t}$

La reemplazamos en la ecuación y determinamos a y b .

```

x[t_] := (a + b t) e^{-t};
(x'''[t] + 7 x''[t] + 16 x'[t] + 12 x[t]) e^t // Simplify
2 a + b (2 t + 5)
    
```

Entonces debemos tomar $a = \frac{7}{4}$ y $b = -\frac{1}{2}$: $x(t) = \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{2}t\right)e^{-t}$

Comprobamos esta solución.

$$\mathbf{x}[t_] := \left(\frac{7}{4} - \frac{1}{2} t \right) e^{-t}$$

$$\mathbf{x}'''[t] + 7\mathbf{x}''[t] + 16\mathbf{x}'[t] + 12\mathbf{x}[t] // \text{Simplify}$$

$$-e^{-t}(-1+t)$$

Ejemplo 2

Sea la ecuación $x''' + 7x'' + 16x' + 12x = (1-t)e^{-3t}$

El polinomio característico $c(\lambda) = \lambda^3 + 7\lambda^2 + 16\lambda + 12$ tiene -3 raíz simple y -2 raíz doble.

Como -3 es raíz característica simple debemos buscar una solución de la forma $x(t) = t(a + bt)e^{-3t}$

$$\mathbf{x}[t_] := t(a + bt)e^{-3t};$$

$$(\mathbf{x}'''[t] + 7\mathbf{x}''[t] + 16\mathbf{x}'[t] + 12\mathbf{x}[t])e^{3t} // \text{Simplify}$$

$$a + 2b(t-2)$$

Debemos tomar $a = -1$ y $b = -\frac{1}{2}$: $x(t) = t(-1 - \frac{1}{2}t)e^{-3t}$

La comprobamos.

$$\mathbf{x}[t_] := t \left(-1 - \frac{1}{2} t \right) e^{-3t}$$

$$\mathbf{x}'''[t] + 7\mathbf{x}''[t] + 16\mathbf{x}'[t] + 12\mathbf{x}[t] // \text{Simplify}$$

$$-e^{-3t}(-1+t)$$

Ejemplo 3

Sea $x''' + 2x' + x = \sin t$

Resolvemos primero $X''' + 2X' + X = e^{it}$ cuya ecuación característica es $\lambda^3 + 2\lambda + 1 = 0$.

Como i no es raíz característica tomamos $X(t) = ae^{it}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}[t_] &:= \mathbf{a} e^{\mathbf{i} t} \\ (\mathbf{x}'''[t] + 2 \mathbf{x}'[t] + \mathbf{x}[t]) e^{-\mathbf{i} t} & // \text{Simplify} \\ (1 + \mathbf{i}) \mathbf{a} \end{aligned}$$

Luego $a = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$ y una solución compleja es $X(t) = \frac{1-i}{2} e^{it}$.

Tomando la parte imaginaria obtenemos la solución particular $x(t) = \frac{1}{2}(-\cos t + \sin t)$ de la ecuación.

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de $x''' + 2x'' + x' = t \sin t$

$$\text{Rta: } \frac{1}{2}(1-t) \sin t - \cos t + c_1 + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t}$$

Ejercicio

Hallar una solución de $x''' + 7x'' + 16x' + 12x = (1-t)e^{-2t}$

$$\text{Rta: } x(t) = t^2\left(1 - \frac{1}{6}t\right)e^{-2t}$$

Ejercicio

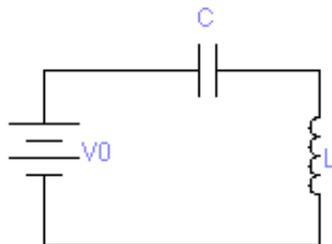
- a) Hallar la solución real de $x^{(iv)} - x = 1$ que verifica $x(0) = x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0$
- b) Hallar una solución real particular de $x^{(iv)} - x = e^t$

Ejercicio

- a) Hallar todas las soluciones reales de $x'' + 4x = \cos t$ y demostrar que todas son acotadas.
- b) Hallar todas las soluciones reales de $x'' + 4x = \cos 2t$ y demostrar que todas son no acotadas.

Ejercicio

Considere un circuito en serie LC con $C = 20 \mu\text{F}$, $L = 80 \mu\text{H}$ y el voltaje constante $V_0 = 12 \text{ V}$ a partir de $t = 0$. Inicialmente no hay corriente y el capacitor está descargado. Calcule la corriente.



$$\text{Rta: } i(t) = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \sin \frac{t}{\sqrt{LC}} = 6 \sin 25000 t$$

Estados naturales de un sistema físico

Supongamos que la ecuación diferencial $\mathcal{L}(x) = f(t)$ describe un sistema físico y las soluciones $x(t)$ dependen del tiempo. La función $f(t)$ representa la acción externa sobre el sistema.

- a) Las soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(x) = 0$ representan las manifestaciones del sistema cuando no hay acción externa, y se llaman los "estados naturales" del sistema.
- b) Sea $f(t)$ seccionalmente continua, nula en $t < t_0$, y supongamos que el sistema tiene condiciones iniciales nulas en t_0 entonces $x(t) = 0$ en el intervalo $t < t_0$.

En efecto, por el teorema 1 hay una única solución que es continua. En el intervalo $t < t_0$ es solución del homogéneo y como tal en ese intervalo es combinación lineal de una base del homogéneo y en el extremo t_0 tiene condiciones iniciales nulas. Por lo tanto los coeficientes son nulos pues el Wronskiano de la base en t_0 es invertible. Luego la solución es nula en ese intervalo. Observemos que esto es lo que uno espera en sistemas causales.

- c) Sea $f(t)$ seccionalmente continua y supongamos que el sistema tiene condiciones iniciales dadas en t_0 .

Para hallar la única solución lo podemos hacer por tramos en los cuales $f(t)$ es continua y sencilla. Luego pegamos las soluciones parciales apelando a razones de continuidad y a las condiciones iniciales.

Funciones de uso frecuente

El escalón unitario $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$

El escalón unitario finito $e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \text{ ó } t > 1 \\ 1 & \text{si } 0 < t < 1 \end{cases}$ que se escribe también $e(t) = u(t) - u(t - 1)$

La función signo $sg(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ que se escribe también $sg(t) = u(t) - u(-t)$

Ejemplo 4

Resolvemos $x' + x = e^{-t} u(t)$, $x(0) = 1$, donde $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$ es la función escalón unitario.

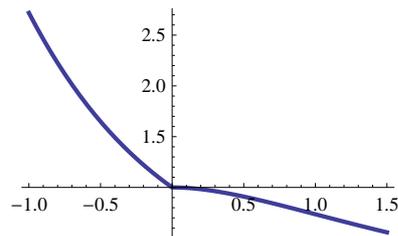
Como la entrada tiene un salto en el origen la solución será continua pero sin derivada en 0.

La solución debe ser $x(t) = k_1 e^{-t}$ en $t < 0$ y $x(t) = t e^{-t} + k_2 e^{-t}$ en $t > 0$

Por ser continua en 0 debe ser $k_1 = k_2 = 1$.

En la gráfica de la solución se aprecia el salto que tiene la derivada en el origen.

```
Plot[If[t < 0, e^-t, (t + 1) e^-t], {t, -1, 1.5}, PlotStyle -> {Thick}]
```



Ejemplo 5

Resolvemos el problema $x'' + 2x' + x = u(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Como $u(t)$ tiene un salto en $t = 0$ hay una única solución $x(t)$ continua, con derivada continua y con derivada segunda seccionalmente continua con un salto en 0.

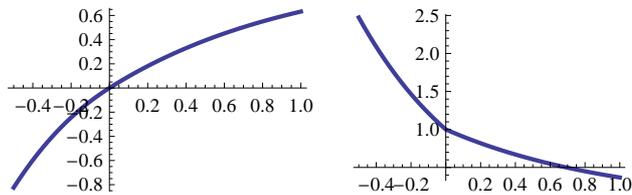
Las soluciones de la homogénea son $c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$. Una solución particular es de la forma $x_p(t) = (1 + c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}) u(t)$ y para que sea continua con derivada primera continua deben ser $c_1 = c_2 = -1$. Luego $x_p(t) = (1 - e^{-t} - t e^{-t}) u(t)$

La solución general es $x(t) = x_p(t) + b_1 e^{-t} + b_2 t e^{-t}$ e imponiendo las condiciones iniciales obtenemos

$b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Luego la solución buscada es $x(t) = t e^{-t} u(-t) + (1 - e^{-t}) u(t)$.

Graficamos la solución y su derivada. Se aprecia que la derivada es continua pero la derivada segunda tendrá un salto en 0.

```
g1 = Plot[If[t < 0, t e^-t, 1 - e^-t], {t, -0.5, 1}, PlotStyle -> {Thick}];
g2 = Plot[If[t < 0, (1 - t) e^-t, e^-t], {t, -0.5, 1}, PlotStyle -> {Thick}];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
```



Ejercicio

Resolver y graficar $x'' + 2x' + 2x = \text{sg}(t)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

Ejercicio

Resolver y graficar $x'' + x = e\left(\frac{t}{\pi}\right)$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$

Ejercicio

Hallar todas las soluciones de la ecuación $x'' + x = \text{sg}(t)$

Comprobar que tienen derivada primera continua pero derivada segunda con un salto en 0.

Rta. $(1 - \cos t) \text{sg}(t) + a \cos t + b \sin t$

ESTABILIDAD INTERNA - CONDICIONES DE ROUTH -HURWITZ

El problema del comportamiento de las soluciones $x(t)$ de una ecuación lineal homogénea $\mathcal{L}(x) = 0$ para $t \rightarrow +\infty$ es muy importante en las aplicaciones y será considerado con cierta extensión.

La ecuación lineal $\mathcal{L}(x) = a_0 x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_n x = f(t)$ se dice **estable internamente** si cada solución de la ecuación homogénea $x_0(t)$ tiende a cero para $t \rightarrow +\infty$.

Si un sistema es internamente estable y está en reposo e inesperadamente es perturbado adquiriendo condiciones iniciales no nulas, cuando desaparece la perturbación, automáticamente retorna al reposo.

Uno de los pioneros en el estudio de la estabilidad fue el ingeniero ruso Alexander Lyapunov quien

durante la segunda mitad del siglo XIX estableció las bases para su estudio, aún en sistemas no lineales.

Como las funciones del tipo $t^k e^{\lambda t}$ forman una base de las soluciones de la ecuación homogénea, estudiamos primero el límite para este tipo de funciones.

Sea $\lambda = \alpha + i\beta \neq 0$ y $k \geq 0$: $t^k e^{\lambda t} = t^k e^{\alpha t} e^{i\beta t}$ y $|t^k e^{\lambda t}| = t^k e^{\alpha t}$

Si $\alpha < 0$ entonces $t^k e^{\alpha t}$ tiende a cero para $t \rightarrow +\infty$ y por ello también $t^k e^{\lambda t}$.

Si $\alpha = 0$ y $k = 0$ la función es $\cos \beta t + i \sin \beta t$ que oscila acotadamente para $t \rightarrow +\infty$.

Si $\alpha = 0$ y $k > 0$ la función es $t^k(\cos \beta t + i \sin \beta t)$ que oscila no acotadamente para $t \rightarrow +\infty$.

Si $\alpha > 0$ la solución tiende a $+\infty$ u oscila no acotadamente.

En conclusión:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^k e^{\lambda t} = 0 \text{ si y sólo si } \text{Real}(\lambda) < 0.$$

Cada solución de la homogénea es una combinación lineal $x_0(t) = \sum_{h=1}^s p_h(t) e^{\lambda_h t}$ donde λ_h son las distintas raíces características.

1. Si la parte real de cada raíz característica es menor que cero entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_0(t) = 0$.
2. Recíprocamente, si alguna raíz característica λ_h tiene parte real ≥ 0 , entonces $|e^{\lambda_h t}| \geq 1$ y la solución $e^{\lambda_h t}$ no tiende a cero cuando $t \rightarrow +\infty$.

Podemos enunciar los resultados obtenidos.

Teorema

Una ecuación es internamente estable si y sólo si cada raíz característica tiene parte real menor que cero.

Decimos que un polinomio real mónico es estable si tiene todas sus raíces con parte real menor que cero. Una condición necesaria para la estabilidad es la siguiente

Teorema

Un polinomio real mónico estable tiene todos sus coeficientes mayores que cero.

Demostarción

Si dos polinomios tienen todos sus coeficientes mayores que cero entonces su producto también pues sus coeficientes son sumas de productos de números mayores que cero.

Lo mismo vale para el producto de más de dos polinomios.

Si $p(\lambda)$ es real mónico estable con raíces reales $-\alpha_1 < 0, \dots, -\alpha_r < 0$ y complejas conjugadas $-\beta_1 + i\gamma_1, \dots, -\beta_s + i\gamma_s, -\beta_1 < 0, \dots, -\beta_s < 0$, se factoriza

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (\lambda + \alpha_1) \dots (\lambda + \alpha_r) (\lambda + \beta_1 - i\gamma_1) (\lambda + \beta_1 + i\gamma_1) \dots (\lambda + \beta_s - i\gamma_s) (\lambda + \beta_s + i\gamma_s) \\ &= (\lambda + \alpha_1) \dots (\lambda + \alpha_r) (\lambda^2 + 2\beta_1\lambda + (\beta_1^2 + \gamma_1^2)) \dots \dots (\lambda^2 + 2\beta_s\lambda + (\beta_s^2 + \gamma_s^2)) \end{aligned}$$

y es producto de polinomios con coeficientes mayores que cero. Luego sus coeficientes son todos mayores que cero.

q.e.d.

En particular, si un polinomio mónico tiene algún coeficiente nulo o negativo no puede ser estable. Por ejemplo $\lambda^3 + 2\lambda + 3$ no es estable. Comprobamos que efectivamente tiene raíces inestables.

`Solve` [$\lambda^3 + 2\lambda + 3 = 0, \lambda$]

$$\left\{ \{\lambda \rightarrow -1\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{2} (1 - i\sqrt{11}) \right\}, \left\{ \lambda \rightarrow \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{11}) \right\} \right\}$$

Tiene dos raíces inestables $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{11})$

- a) No vale la recíproca del teorema anterior. Por ejemplo: $\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)$ tiene todos sus coeficientes mayores que cero pero tiene las raíces inestables $\pm i$.
- b) Si un polinomio real mónico $p(\lambda)$ tiene todos sus coeficientes mayores que cero entonces $p(\lambda) > 0$ para cada $\lambda \geq 0$ y entonces todas sus raíces reales son menores que cero. Luego su posible inestabilidad se puede deber únicamente a raíces complejas con parte real ≥ 0 .
- c) Si por alguna razón se sabe que cierto polinomio mónico tiene todas sus raíces reales y sus coeficientes son mayores que cero entonces, por lo dicho en b), es estable.
- d) En álgebra lineal se prueba que el polinomio característico de una matriz real y simétrica tiene todas sus raíces reales. Podemos resumir la información en el siguiente.
Sea A una matriz real y simétrica y $p_A(\lambda)$ su polinomio característico. Son equivalentes:
- $p_A(\lambda)$ es estable, es decir todas sus raíces son menores que cero.
 - Los coeficientes de $p_A(\lambda)$ son todos mayores que cero.
 - La función cuadrática $X^T A X$ es definida negativa.
 - Los menores principales de A alternan en signo: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

Este resultado será de interés cuando estudiemos más adelante estabilidad de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo

Para cada k real la matriz $\begin{pmatrix} -7 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & k \\ 1 & k & -1 \end{pmatrix}$ es real y simétrica y su polinomio característico es

$$\lambda^3 + 9\lambda^2 + (-k^2 + 10)\lambda + (-7k^2 + 4k + 2)$$

Será estable únicamente en los valores de k para los cuales los coeficientes sean mayores que cero. Resolvemos las desigualdades usando el *Mathematica 7*.

Reduce $[-k^2 + 10 > 0, -7k^2 + 4k + 2 > 0], k, \text{Reals}] // N$

$$-0.320377 < k < 0.891806$$

Únicamente para estos valores de k el polinomio es estable.

Ejercicio

a) Averiguar si el polinomio característico de $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ es estable

b) Para qué valores de k el polinomio característico de $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ es estable

c) Para qué valores de k el polinomio característico de $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & k \end{pmatrix}$ es estable

Polinomios de grado dos

Probaremos que para polinomios de grado dos el criterio de los coeficientes positivos es siempre cierto.

TEOREMA $\lambda^2 + b\lambda + c$ es estable si y sólo si $b > 0$ y $c > 0$

Demostración

Sabemos por un teorema anterior que si es estable entonces sus coeficientes son mayores que cero.

Para la recíproca usamos la fórmula para las raíces $\lambda = \frac{1}{2}(-b \pm \sqrt{b^2 - 4c})$

Supongamos que $b > 0$ y $c > 0$.

Si $0 < 4c \leq b^2$ es claro que las raíces son reales y menores que cero.

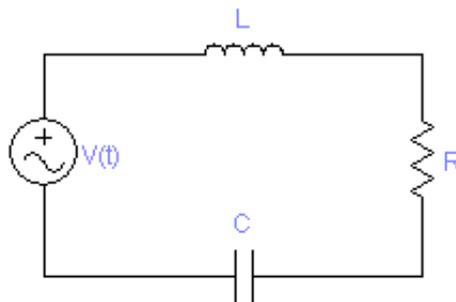
Si $4c > b^2$ las raíces son complejas con parte real $-b/2 < 0$.

Luego en cualquier caso es estable.

q.e.d.

Ejemplo

Consideremos un circuito en serie RLC con una fuente de tensión armónica $V(t) = A \sin \omega t$.



La diferencia de potencial en el capacitor v_C satisface la ecuación diferencial

$$CLv_C'' + CRv_C' + v_C = A \sin \omega t$$

El polinomio mónico asociado $\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL}$ es estable pues es de grado dos con coeficientes positivos.

Las raíces características son

$$\frac{1}{2CL} \left(-RC \pm \sqrt{R^2 C^2 - 4LC} \right)$$

a) Las soluciones de la homogénea son:

$$\begin{array}{lll} c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} & r_1 < r_2 < 0 & \text{si } CR^2 > 4L \\ c_1 e^{r t} + c_2 t e^{r t} & r < 0 & \text{si } CR^2 = 4L \\ e^{r t}(c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) & r < 0 & \text{si } CR^2 < 4L \end{array}$$

b) Para estudiar la ecuación no homogénea $CLv_C'' + CRv_C' + v_C = \sin \omega t$ consideremos la no homogénea compleja asociada $CLV'' + CRV' + V = e^{i\omega t}$. Como la ecuación es estable $i\omega$ no es raíz característica y hay una solución de la forma $K e^{i\omega t}$. Reemplazándola en la ecuación obtenemos

$$K = \frac{1}{1 - CL\omega^2 + CR\omega i} = \frac{(1 - CL\omega^2) - RC\omega i}{(1 - CL\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2} = \rho e^{i\delta}$$

$$\text{con } \rho = \frac{1}{\sqrt{(1 - CL\omega^2)^2 + C^2 R^2 \omega^2}} > 0 \quad \text{y} \quad \text{tg } \delta = -\frac{RC\omega}{1 - CL\omega^2}.$$

Una salida particular de $CLv_C'' + CRv_C' + v_C = \sin \omega t$ es entonces $v_C(t) = A\rho \sin(\omega t + \delta)$.

La corriente es

$$i(t) = C v_C'(t) = C\rho\omega \cos(\omega t + \delta) = C\rho\omega \sin\left(\omega t + \delta + \frac{\pi}{2}\right) = C\rho\omega \sin\left[\omega\left[t + \frac{1}{\omega}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right)\right]\right].$$

La entrada $A \sin \omega t$ tiene fase nula y amplitud 1. Estudiamos la corriente de salida.

i) Si $1 - CL\omega^2 > 0$ entonces $\text{tg } \delta < 0$ y tomamos δ en el cuarto cuadrante: $-\frac{\pi}{2} < \delta < 0$.

Luego $0 < \frac{1}{\omega}\left(\delta + \frac{\pi}{2}\right) < \frac{1}{\omega}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{4}\frac{2\pi}{\omega}$ y la corriente adelanta menos de $\frac{1}{4}$ de período respecto de la entrada. El capacitor, para esas frecuencias ω , tiene mayor influencia que la bobina.

ii) Si $1 - CL\omega^2 = 0$ entonces $\text{tg } \delta = -\infty$ y tomamos $\delta = -\frac{\pi}{2}$ y la corriente está en fase

con la entrada. En esa frecuencia ω el capacitor tiene la misma influencia que la bobina.

- iii) Si $1 - CL\omega^2 < 0$ es $\text{tg } \delta > 0$ y elegimos δ en el tercer cuadrante: $-\pi < \delta < -\frac{\pi}{2}$ y entonces $-\frac{\pi}{2} < \delta + \frac{\pi}{2} < 0$ y $-\frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega} < \frac{1}{\omega} \left(\delta + \frac{\pi}{2} \right) < 0$. Luego la corriente atrasa menos de $\frac{1}{4}$ de período respecto de la entrada el capacitor tiene menor influencia que la bobina.

La amplitud de la corriente es $C \rho(\omega) \omega$ que varía con la frecuencia empleada y queremos averiguar para qué frecuencia es máxima. La función

$$\rho(\omega) \omega = \frac{\omega}{\sqrt{(1 - CL\omega^2)^2 + C^2 R^2 \omega^2}} \quad \text{tiene derivada nula en } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{y } C \rho(\omega_0) \omega_0 = \frac{1}{R}$$

y la amplitud máxima es $C \rho(\omega_0) \omega_0 = \frac{1}{R}$.

- c) Finalmente consideremos el circuito anterior pero sin la resistencia.

La ecuación $CLv_C'' + v_C = V(t)$ no es estable y sus raíces características son $\pm \omega_0 i$

con $\omega_0 = (\sqrt{LC})^{-1}$ y las soluciones de la homogénea son $c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$.

Consideremos una entrada armónica $CLv_C'' + v_C = \sin \omega t$.

1. Si $\omega \neq \omega_0$ la ecuación $CLV'' + V = e^{i\omega t}$ tiene una salida $V = K e^{i\omega t}$. Haciendo el reemplazo obtenemos $K(\omega) = (1 - CL\omega^2)^{-1}$ real. Una solución particular es $v_C(t) = K \sin \omega t$.

La corriente es $i(t) = C v_C'(t) = CK\omega \cos \omega t = CK\omega \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = CK\omega \sin\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right)$

Como $\frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4} \frac{2\pi}{\omega}$ esta corriente adelanta un cuarto de período respecto del voltaje de entrada.

El potencial en el capacitor se amplifica cada vez más a medida que ω se acerca a la frecuencia característica ω_0 pues $\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} K(\omega) = +\infty$.

2. Si $\omega = \omega_0$ para $CLV'' + V = e^{i\omega_0 t}$ debemos proponer $V = K t e^{i\omega_0 t}$

Reemplazando en la ecuación queda

$$K = \frac{1}{2i\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\sqrt{LC}} e^{-\frac{\pi}{2}i} \quad \text{y} \quad V = \frac{1}{2\sqrt{LC}} t e^{i\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)}$$

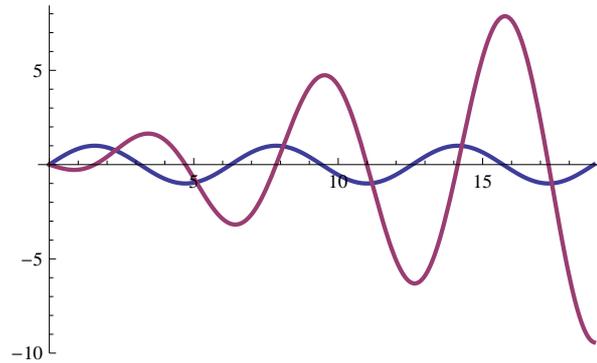
Una respuesta particular es $v_C(t) = \frac{t}{2\sqrt{LC}} \sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{t}{2\sqrt{LC}} \cos \omega_0 t$, que no es acotada

a pesar de que la entrada es acotada y este fenómeno se conoce como "resonancia".

Este es un comportamiento típico de los sistemas internamente inestables según se verá en la unidad 2.

Graficamos la entrada y la corriente para $L = C = 1$ y $\omega = 1$.

```
Plot[{Sin[t],  $\frac{t}{2}$  Sin[t -  $\frac{\pi}{2}$ ]}, {t, 0, 6  $\pi$ }, PlotRange -> All, PlotStyle -> {Thick}]
```



Polinomios de grado tres

Consideremos un polinomio real mónico de grado tres: $\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$
Siempre tiene una raíz real que la anotamos, por conveniencia técnica, $-\alpha$ y se factoriza con un polinomio real mónico cuadrático

$$\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = (\lambda + \alpha)(\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma) = \lambda^3 + (\alpha + \beta)\lambda^2 + (\alpha\beta + \gamma)\lambda + \alpha\gamma$$

Igualando coeficientes $b = \alpha + \beta$, $c = \alpha\beta + \gamma$ y $d = \alpha\gamma$

Si el polinomio es estable sabemos que tiene los coeficientes mayores que cero.
La recíproca no vale, como muestran los polinomios

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1 = (\lambda^2 + 1)(\lambda + 1) \text{ cuyas raíces son } -1, \pm i.$$

$$\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 2 \text{ cuyas raíces son } -1.35321, 0.176605 \pm 1.20282i.$$

Entonces es preciso agregar condiciones para que un polinomio de grado 3 sea estable.
Por ejemplo, si un polinomio de grado 3 es estable, además verifica:

$$bc = (\alpha + \beta)(\alpha\beta + \gamma) > \alpha\gamma = d$$

es decir $bc > d$. Esta desigualdad no la verifican los dos polinomios dados antes.
Esta condición extra es suficiente para que sea estable como se muestra en el teorema siguiente.

Teorema

El polinomio real $\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ es estable si y sólo $b > 0, c > 0, d > 0, bc > d$

Demostración

Ya demostramos que si es estable verifica las 4 desigualdades anteriores.

Recíprocamente, supongamos que $b > 0, c > 0, d > 0$ y $bc > d$.

Con la notación anterior debemos probar que $\alpha > 0, \beta > 0$ y $\gamma > 0$.

Se tiene $0 < b = \alpha + \beta, 0 < c = \alpha\beta + \gamma$ y $0 < d = \alpha\gamma$. Luego $\alpha \neq 0, \gamma \neq 0$.

Si fuera $\alpha < 0$ serían $\beta > 0$ y $\gamma < 0$, y por ello $c = \alpha\beta + \gamma < 0$ contra lo supuesto.

Luego $\alpha > 0$ y como $d = \alpha\gamma > 0$ resulta $\gamma > 0$.

Si fuera $\beta \leq 0$ sería $0 < b = \alpha + \beta \leq \alpha$ y $0 < c = \alpha\beta + \gamma \leq \gamma$ y por lo tanto

$bc = (\alpha + \beta)(\alpha\beta + \gamma) \leq \alpha\gamma = d$ contra lo supuesto. Luego $\beta > 0$.

q.e.d.

Ejemplo 1 $\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda + 11$ no es estable pues $2 \times 5 \leq 11$.

Por otro lado, calculando encontramos que sus raíces aproximadas son -2.106 y $0.053 \pm 2.284i$.

Ejemplo 2 $\lambda^3 + \lambda^2 + 11\lambda + 2k$ es estable $\Leftrightarrow 0 < k < 5.5$

Ejercicio Estudiar la estabilidad de los polinomios

$$\lambda^3 + k\lambda^2 + (k+1)\lambda + 1 \quad \text{y} \quad \lambda^3 + k\lambda^2 + k\lambda + (k-1).$$

Condiciones de Hurwitz

Se pueden obtener condiciones equivalentes para estabilidad usando el siguiente criterio dado por Hurwitz. Al polinomio mónico $\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ le asociamos la matriz 3×3 :

$$H = \begin{pmatrix} b & d & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & b & d \end{pmatrix}$$

cuyos menores principales son $\Delta_1 = b, \Delta_2 = bc - d$ y $\Delta_3 = \Delta_2 d$

El criterio de Hurwitz es el siguiente.

Teorema $\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d$ es estable si y sólo si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$.

Demostración

⇒ Si el polinomio es estable, por el teorema anterior $b > 0, c > 0, d > 0$ y $bc > d$.

Entonces $\Delta_1 = b > 0, \Delta_2 = bc - d > 0$ y $\Delta_3 = (bc - d)d > 0$.

⇐ Recíprocamente, supongamos ahora que los tres menores principales son positivos.

Probaremos que se cumplen $b > 0, c > 0, d > 0$ y $bc > d$.

Es $b = \Delta_1 > 0$. Por ser $\Delta_2 > 0$ resulta $bc > d$ y de $\Delta_3 > 0$ resulta $d > 0$.

Finalmente las condiciones $0 < \Delta_2 = bc - d$ y $b > 0$ y $d > 0$ obligan a $c > 0$.

q.e.d.

Ejercicio Estudiar la estabilidad de los polinomios mediante el criterio de Hurwitz

$$\lambda^3 + \lambda^2 + k\lambda + (k+1) \quad \text{y} \quad \lambda^3 + k^2\lambda^2 + \lambda + k.$$

Polinomios de grado cuatro

Para un polinomio de grado 4 no es sencillo descubrir condiciones extras que garanticen la estabilidad pero podemos intentar una matriz de Hurwitz y usar sus menores principales para obtener posibles condiciones y ver si son acertadas. Al polinomio mónico de grado 4

$$\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e$$

le asociamos la matriz de Hurwitz 4×4 :

$$H = \begin{pmatrix} b & d & 0 & 0 \\ 1 & c & e & 0 \\ 0 & b & d & 0 \\ 0 & 1 & c & e \end{pmatrix}$$

Sus menores principales son

$$\Delta_1 = b, \quad \Delta_2 = bc - d, \quad \Delta_3 = bcd - b^2e - d^2, \quad \Delta_4 = e\Delta_3.$$

Veamos que, la positividad de estos menores, nos proporciona las condiciones adecuadas.

Teorema Son equivalentes:

- i) el polinomio real mónico $\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e$ es estable
- ii) los cuatro menores principales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ son mayores que cero.
- iii) $b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, bcd > b^2e + d^2$

Demostración

ii) ⇒ iii)

Si los cuatro menores principales son mayores que cero es claro que $b > 0, e > 0$.

Además $\Delta_3 > 0$ se escribe $(bc - d)d > b^2e > 0$ y como $\Delta_2 = bc - d > 0$ resulta

$d > 0$. De $\Delta_2 = bc - d > 0, b > 0, d > 0$, es claro que $c > 0$.

Finalmente de $\Delta_3 = bcd - b^2e - d^2 > 0$ resulta $bcd > b^2e + d^2$.

iii) ⇒ ii)

Si $b > 0, c > 0, d > 0, e > 0, bcd > b^2e + d^2$, entonces $\Delta_1 = b > 0; \Delta_3 = bcd - b^2e - d^2 > 0;$

$\Delta_4 = e\Delta_3 > 0$; de $0 < bcd - b^2e - d^2 = d(bc - d) - b^2e$ resulta $d(bc - d) > b^2e > 0$ y por lo

tanto, como $d > 0, \Delta_2 = bc - d > 0$.

Para demostrar las otras implicaciones tenemos en cuenta lo siguiente.

Un polinomio real mónico de cuarto grado se factoriza con dos cuadráticos reales

$$\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e = (\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta)(\lambda^2 + \gamma\lambda + \delta)$$

e igualando coeficientes $b = \alpha + \gamma$, $c = \alpha\gamma + \beta + \delta$, $d = \alpha\delta + \beta\gamma$, $e = \beta\delta$.

Buscamos una expresión adecuada para $bcd - b^2e - d^2$. Se tiene

$$\begin{aligned} bcd &= (\alpha + \gamma)(\alpha\gamma + \beta + \delta)(\alpha\delta + \beta\gamma) \\ b^2e + d^2 &= (\alpha + \beta)^2\beta\delta + (\alpha\delta + \beta\gamma)^2 \end{aligned}$$

Restando, simplificando y reordenando queda

$$\begin{aligned} bcd - b^2e - d^2 &= \alpha\gamma [\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2 + \delta^2 + \beta^2 + \alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma - 2\beta\delta] \\ &= \alpha\gamma [\alpha\gamma\delta + \beta\gamma^2 + \alpha^2\delta + \alpha\beta\gamma + (\beta - \delta)^2] \\ &= \alpha\gamma [\alpha\delta(\gamma + \alpha) + \beta\gamma(\gamma + \alpha) + (\beta - \delta)^2] \\ &= \alpha\gamma [(\alpha\delta + \beta\gamma)(\gamma + \alpha) + (\beta - \delta)^2] \\ &= \alpha\gamma [bd + (\beta - \delta)^2] \end{aligned}$$

Luego
$$bcd - b^2e - d^2 = \alpha\gamma [bd + (\beta - \delta)^2]$$

Es estable \Leftrightarrow cada factor cuadrático lo es $\Leftrightarrow \alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$ y $\delta > 0$.

i) \Rightarrow iii)

Si el polinomio es estable $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$.

y $bcd - b^2e - d^2 = \alpha\gamma [bd + (\beta - \delta)^2] > 0$.

iii) \Rightarrow i)

Supongamos que $b > 0$, $c > 0$, $d > 0$, $e > 0$ y $bcd > b^2e + d^2$.

Para probar la estabilidad debemos ver que $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$.

De $e = \beta\delta > 0$ resulta $\beta \neq 0$. Veamos que $\beta > 0$ y entonces $\delta > 0$.

Si fuera $\beta < 0$ sería $\delta < 0$ y como $c = \alpha\gamma + \beta + \delta > 0 \Rightarrow \alpha\gamma > 0$ y como

$b = \alpha + \gamma > 0 \Rightarrow \alpha > 0$ y $\gamma > 0$; entonces $d = \alpha\delta + \beta\gamma < 0$ lo cual no es cierto.

Luego necesariamente $\beta > 0$ y entonces $\delta > 0$.

Además, de $0 < bcd - b^2e - d^2 = \alpha\gamma [bd + (\beta - \delta)^2]$ y $bd > 0$ resulta $\alpha\gamma > 0$

y como $\alpha + \gamma = b > 0$, necesariamente $\alpha > 0$ y $\gamma > 0$.

q.e.d

Ejemplos

a) $\lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + k$

Para que sea estable debe ser $k > 0$ y $1 > k + 1$ lo cual es imposible.

Luego no es estable para ningún valor de k .

b) $\lambda^4 + 6\lambda^3 + 11\lambda^2 + (k+6)\lambda + k$

Es estable si $k+6 > 0$, $k > 0$ y $6 + 11(k+6) > 6^2 k + (k+6)^2$

Utilizamos el programa para resolver estas desigualdades.

Reduce [{ $k + 6 > 0$, $k > 0$, $66(k + 6) > 36k + (k + 6)^2$ }, k , **Reals**]

$$0 < k < 30$$

Por lo tanto es estable para $0 < k < 30$.

Ejercicio

Estudiar la estabilidad de los polinomios

$$\lambda^4 + 2k\lambda^3 + (k+2)\lambda^2 + \lambda + 1$$

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + k\lambda^2 + k\lambda + 1$$

$$\lambda^4 + 4k\lambda^3 + k\lambda^2 + 2k\lambda + 1$$

Polinomios de grado mayor

Las condiciones propuestas por Hurwitz se pueden generalizar a polinomios de grado mayor, pero su demostración es muy dificultosa. En cambio, en el apéndice de esta unidad está demostrado, para cualquier orden, el método establecido por Routh.

Ejercicio

a) Al polinomio mónico de grado 5 $p(\lambda) = \lambda^5 + b\lambda^4 + c\lambda^3 + d\lambda^2 + e\lambda + f$ asociarle la matriz de Hurwitz 5×5 y proponer para estabilidad que sus menores principales sean positivos.

b) Con los polinomios que se dan a continuación corroborar la pertinencia de las condiciones dadas en a).

$$x^5 + 50x^4 + 40x^3 + 40x^2 + 10x + 1$$

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

c) ¿ Para qué valores de k el polinomio $x^5 + 4x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + k$ es estable ?

$$\text{Rta: } 0 < k < 19\sqrt{7} - 49 \approx 1.26$$

Nota histórica

Las condiciones para estabilidad fueron obtenidas en forma independiente por E.J.Routh (Inglaterra - 1877) y por A.Hurwitz (Alemania - 1895) y por ello se las conoce como "Condiciones de Routh-Hurwitz".

El enunciado de las condiciones y la demostración para polinomios de cualquier grado se puede consultar en

- Funtions of a complex variable - vol II -Fuchs-Levin, Addison Wesley
- Solving Ordinary Differential Equations I , Hair-Norsett-Wanner; Springer
- Applied and Computational Complex Analysis -Vol II - P. Henrici; Wiley

Estabilidad y entrada armónica

Supongamos que la ecuación diferencial $\mathcal{L}(x) = f(t)$ describe un sistema físico.

Entonces $f(t)$ representa la acción externa sobre el sistema.

Las soluciones de la ecuación homogénea $\mathcal{L}(x) = 0$ son los estados naturales del sistema.

Hemos visto que si λ es una raíz característica de multiplicidad $k \geq 1$ entonces $t^r e^{\lambda t}$, $0 \leq r \leq k - 1$, son k estados naturales.

Para que un sistema físico sea estable es preciso que tenga disipadores de energía, como pueden ser las resistencias, en circuitos eléctricos, y las fuerzas de roce, en sistemas mecánicos. Pero la presencia de estos elementos no garantiza la estabilidad, como se verá en ejemplos dados más adelante.

Supongamos que la ecuación $\mathcal{L}(x) = f(t)$ es estable y su ecuación característica es $c(\lambda) = 0$.

Para cada excitación armónica $f(t) = e^{i\omega t}$, como las raíces características tienen parte real negativa, resulta que $i\omega$ no es raíz característica: $c(i\omega) \neq 0$. Proponemos entonces una solución de la forma $x(t) = K e^{i\omega t}$ que reemplazada en la ecuación da la condición $K c(i\omega) = 1$. Luego

$$K = c(i\omega)^{-1} = H(i\omega)$$

y obtenemos una solución armónica de la misma frecuencia que la excitación.

La función $H(z)$ se llama **función de transferencia** de la ecuación.

$$\begin{array}{lcl} \text{entrada} & \rightarrow & \text{respuesta permanente} \\ e^{i\omega t} & \rightarrow & H(i\omega) e^{i\omega t} \end{array}$$

Esta respuesta se llama "permanente" y todas las demás difieren de ella en una solución de la

homogénea que, por ser la ecuación estable, decaen a cero y por ello se llaman "transitorias".

Concluimos que toda solución de $\mathcal{L}(x) = e^{i\omega t}$ se acerca a la permanente a medida que el tiempo crece.

El número complejo $H(i\omega) = \rho e^{i\varphi}$ tiene valor absoluto $\rho = \rho(\omega)$ y argumento $\varphi(\omega)$, que dependen de la frecuencia ω de la entrada. La respuesta permanente se escribe

$$H(i\omega) e^{i\omega t} = \rho e^{i(\omega t + \varphi)} = \rho e^{i\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)}$$

Si la entrada es $\sin \omega t$ la salida permanente es la parte imaginaria de $H(i\omega) e^{i\omega t}$.

entrada \rightarrow respuesta permanente

$\sin \omega t \rightarrow \rho \sin(\omega t + \varphi)$

Veamos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1 Resolvemos la ecuación $x'' + 3x' + 2x = \sin 2t$

La ecuación compleja asociada $X'' + 3X' + 2X = e^{2it}$ tiene la solución permanente

$$X(t) = H(2i) e^{2it} = \left(-\frac{1}{20} - \frac{3}{20}i\right) e^{2it} \approx 0.158 e^{(2t - 1.893)i}$$

$$\mathbf{z} = -\left(\frac{1}{20} + \frac{3}{20}i\right); \{\text{Abs}[\mathbf{z}], \text{Arg}[\mathbf{z}]\} // \mathbf{N}$$

$$\{0.158114, -1.89255\}$$

Luego la ecuación $x'' + 3x' + 2x = \sin 2t$ tiene respuesta permanente $x(t) \approx 0.158 \sin(2t - 1.893)$

La amplitud se ha reducido un 15.8% y la fase atrasa en $1.893/2 = 0.9465$ radianes ó $360(2\pi)^{-1} 0.9465 = 54.23$ grados.

La graficamos junto con la entrada.

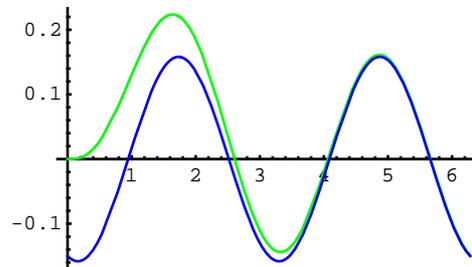
```
Plot[{Sin[2 t], 0.16 Sin[2 (t - 1.893/2)]}, {t, -1, 2 pi},
PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```

Si imponemos condiciones iniciales nulas obtenemos otra solución particular y, en el gráfico observamos que esta última se va mimetizando con la permanente.

```
DSolve[{x''[t] + 3 x'[t] + 2 x[t] == Sin[2 t], x[0] == 0, x'[0] == 0}, x[t], t]
```

$$\left\{\left\{x[t] \rightarrow -\frac{1}{20} e^{-2t} (5 - 8 e^t + 3 e^{2t} \cos[2t] + e^{2t} \sin[2t])\right\}\right\}$$

```
Plot[{- 1/20 e^{-2t} (5 - 8 e^t + 3 e^{2t} Cos[2t] + e^{2t} Sin[2t]),
- 3/20 Cos[2t] - 1/20 Sin[2t]}, {t, 0, 2π}, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0],
RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Ejemplo 2

Sea la ecuación $x'' + 2x' + 5x = 2 \cos 3t$

Calculamos primero una solución de la ecuación compleja $X'' + 2X' + 5X = 2e^{3it}$ y luego tomamos la parte real de la respuesta.

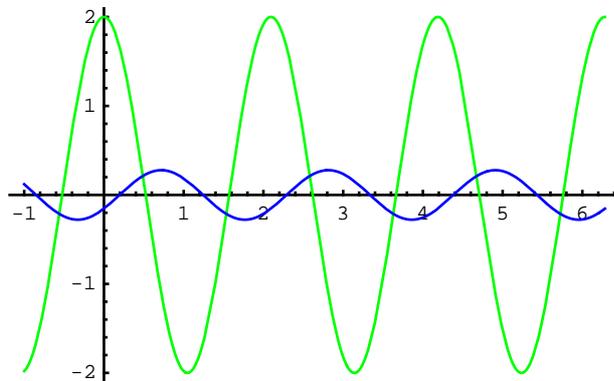
$$H(3i) = \frac{1}{(3i)^2 + 2(3i) + 5} = -\frac{1}{13} - \frac{3}{26}i \approx 0.139 e^{-2.159i}$$

Luego $X(t) = 2\left(-\frac{1}{13} - \frac{3}{26}i\right)e^{3it} = -\frac{1}{13}(2 + 3i)(\cos 3t + i \sin 3t)$ y su parte real es

$$x(t) = -\frac{2}{13} \cos 3t + \frac{3}{13} \sin 3t \approx 2 \cdot 0.139 \cos 3\left(t - \frac{2.159}{3}\right)$$

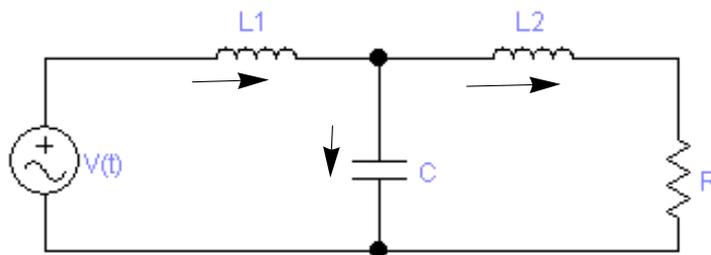
Vemos que la ecuación reduce la amplitud de la entrada a un 13.9 % y la atrasa en $\frac{2.159}{3} \approx 0.72$ radianes.

```
Plot[{2 Cos[3 t], 0.278 Cos[3 (t -  $\frac{2.159}{3}$ )]},
{t, -1, 2  $\pi$ }, PlotStyle -> {RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1]}]
```



Ejemplo 3

Consideremos el circuito de dos mallas de la figura, con un voltaje de entrada $V(t)$, y nos interesa la caída de potencial en la resistencia v_R .



Sean i_1 e i_2 las corrientes en las bobinas y v el potencial en el capacitor; entonces $v_R = R i_2$ y

$$L_1 i_1' + v = V(t) \quad , \quad L_2 i_2' + R i_2 = v \quad , \quad i_1 = i_2 + C v'$$

Reemplazamos i_1 de la tercera en la primera: $L_1 (i_2' + C v'') + v = V(t)$ e introducimos v de la segunda en esta última obteniendo $L_1 (i_2' + C (L_2 i_2''' + R i_2'')) + L_2 i_2' + R i_2 = V(t)$ y reordenando queda $C L_1 L_2 i_2''' + C L_1 R i_2'' + (L_1 + L_2) i_2' + R i_2 = V(t)$; multiplicando por R queda la ecuación de v_R :

$$C L_1 L_2 v_R''' + C L_1 R v_R'' + (L_1 + L_2) v_R' + R v_R = R V(t)$$

El polinomio mónico característico es $c(\lambda) = \lambda^3 + \frac{R}{L_2} \lambda^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \lambda + \frac{R}{C L_1 L_2}$ que es estable

pues tiene coeficientes positivos y se verifica la condición de Ruth-Hurwitz $b c > d$. Por lo tanto, si quitamos la fuente $V(t)$ el potencial en la resistencia se apaga.

Ejercicio

En el circuito anterior, si las constantes físicas son iguales a 1 y la entrada es armónica $V(t) = \sin t$ halle la respuesta permanente para el potencial en la resistencia, su amplitud y fase.

$$\text{Rta. } -\cos t, 1, \frac{\pi}{2}$$

Ejercicio

En el circuito anterior compruebe que

a) la ecuación de la caída de potencial en el capacitor es

$$v''' + \frac{R}{L} v'' + \frac{2}{LC} v' + \frac{R}{L^2 C} v = \frac{1}{LC} V'(t) + \frac{R}{L^2 C} V(t)$$

b) la ecuación de la corriente en la primera bobina es

$$i_1''' + \frac{R}{L} i_1'' + \frac{2}{LC} i_1' + \frac{R}{L^2 C} i_1 = \frac{1}{L} V''(t) + \frac{R}{L^2} V'(t) + \frac{1}{L^2 C} V(t)$$

Ejemplo 4

El sistema mecánico de la figura consiste de una masa colgante m que se mueve verticalmente y sobre la que se ejerce una fuerza vertical $f(t)$. La masa está unida a un resorte de constante k y a un amortiguador de constante b .

Enumeramos y explicamos las fuerzas que actúan sobre la masa.

- i) La restitución del resorte que suponemos lineal: si el sistema se aparta de su equilibrio x la fuerza del resorte es $-k x$. Si el resorte se estira atrae a la masa hacia él y si se comprime la aparta.
- ii) El amortiguador es un cilindro lleno de aceite en el que se mueve un pistón con agujeros. Cuando se mueve desplaza el aceite por los bordes y por los agujeros y se origina una oposición al movimiento que frena la masa y va disipando en calor la energía cinética. Suponemos que es lineal,

es decir, la fuerza ejercida por el amortiguador sobre la masa es proporcional a la velocidad $-b x'$.

En un amortiguador, la velocidad es la relativa entre el pistón y el cilindro, y en nuestro caso es x' .

El amortiguador se opone a cualquier movimiento y por ello lleva signo contrario a la velocidad.

iii) La fuerza externa $f(t)$.

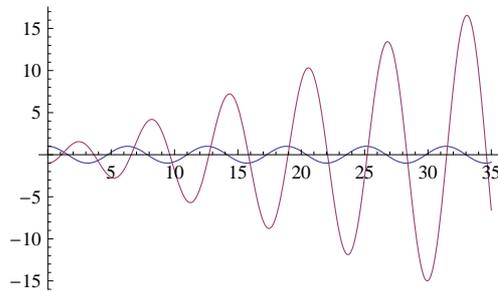
Por la segunda ley de Newton la ecuación del movimiento es $m x'' + b x' + k x = f(t)$

Esta ecuación es estable y por lo tanto todos sus movimientos naturales tienden a detener la masa.

Ello se explica por la presencia del amortiguador que disipa toda energía remanente.

a) Quitando el amortiguador la ecuación es $m x'' + k x = 0$ y no es estable. Si $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ las soluciones son $x_0(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ y la masa oscila con período $2\pi \omega_0^{-1}$ y frecuencia $\omega_0 (2\pi)^{-1}$ Hertz que es la frecuencia natural del sistema.

Si se ejerce una fuerza armónica con esta frecuencia: $m x'' + k x = \cos \omega_0 t$ la respuesta es de la forma $\frac{1}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t + c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ que no es acotada: fenómeno de "resonancia".



b) Volviendo al sistema con amortiguador, si la fuerza externa es armónica con frecuencia $\omega : f(t) = e^{i\omega t}$, la respuesta permanente es armónica con la misma frecuencia

$$H(i\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{m(i\omega)^2 + b i\omega + k} e^{i\omega t} \quad \text{con amplitud} \quad |H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

Averiguamos para qué frecuencia esta amplitud es máxima.

Buscamos el mínimo de $(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2 = k^2 + (b^2 - 2km)\omega^2 + m^2\omega^4$ cuya derivada es $2\omega(b^2 - 2km + 2m^2\omega^2)$.

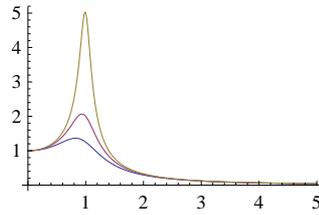
Caso 1 Si $b^2 < 2km$ la amplitud máxima es $\frac{2m}{b\sqrt{4mk - b^2}}$ y ocurre en $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}}$

Graficamos $|H(i\omega)|$ para las constantes $m = 1, k = 1$, y algunos valores decrecientes de b .

```

Clear[b]; H[ω_, b_] := Abs[ $\frac{1}{(i\omega)^2 + b(i\omega) + 1}$ ]
Plot[{H[ω, 0.8], H[ω, 0.5], H[ω, 0.2]}, {ω, 0, 5}, PlotRange -> All]

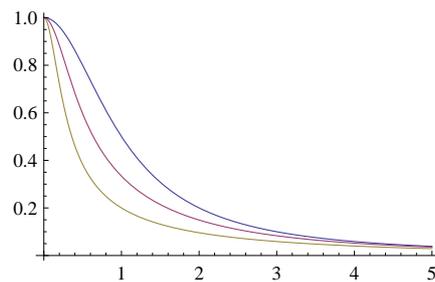
```



Cuando el valor de b decrece a cero, el máximo crece a $+\infty$ y ω_0 se va acercando a $\sqrt{k/m}$. Según vimos en a), ésta es la frecuencia de resonancia cuando no hay amortiguador.

Caso 2 Si $b^2 \geq 2km$ la amplitud máxima ocurre en la frecuencia $\omega = 0$ y la fuerza constante. Graficamos $|H(i\omega)|$ para $m = 1; k = 1; b = 2, 3, 5$.

```
Plot[{H[ω, 2], H[ω, 3], H[ω, 5]}, {ω, 0, 5}]
```



Ejemplo 5 "Absorbedor de vibraciones"

Si la masa m del sistema anterior, está sometida a una fuerza armónica $f(t) = a \sin \omega t$ entonces vibra a una frecuencia ω . Si ello resulta muy molesto, recurrimos a un "absorbedor de vibraciones" para eliminarla. Para ello, colgamos de la masa m un resorte de constante k_1 y una masa m_1 como se indica..

Veamos que, eligiendo k_1 y m_1 adecuados, podemos lograr que cualquier movimiento de la masa m se extinga.. Si x y x_1 representan, respectivamente, lo que se apartan las masas m y m_1 del equilibrio, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} m x'' &= -k x - b x' - k_1 (x - x_1) + f(t) \\ m_1 x_1'' &= k_1 (x - x_1) \end{aligned}$$

Buscamos la ecuación que verifica x que expresa el movimiento de la masa m . Para ello, despejamos x_1 de la primera ecuación, y la reemplazamos en la segunda, obteniendo la ecuación mónica de orden 4

$$x^{(4)} + \frac{b}{m} x^{(3)} + \frac{m k_1 + m_1 k + m_1 k_1}{m m_1} x'' + \frac{b k_1}{m m_1} x' + \frac{k k_1}{m m_1} x = \frac{1}{m} f''(t) + \frac{k_1}{m m_1} f(t)$$

Queremos que $x = 0$ sea una solución cuando $f(t) = a \sin \omega t$. Para ello la ecuación debe ser homogénea, o sea

$$0 = \frac{1}{m} f''(t) + \frac{k_1}{m m_1} f(t) = \frac{1}{m} \left\{ f''(t) + \frac{k_1}{m_1} f(t) \right\} = \frac{a}{m} \left(-\omega^2 + \frac{k_1}{m_1} \right) \sin \omega t .$$

Ello se cumple cuando $\omega^2 = \frac{k_1}{m_1}$, lo cual nos indica cómo elegir el "absorbedor".

Veamos que la ecuación anterior es estable internamente. En efecto, los coeficientes son positivos y además

$$b_1 = \frac{b}{m}; \quad c_1 = \frac{m k_1 + m_1 k + m_1 k_1}{m m_1}; \quad d_1 = \frac{b k_1}{m m_1}; \quad e_1 = \frac{k k_1}{m m_1};$$

$b_1 c_1 d_1 - b_1^2 e_1 - d_1^2$ // Simplify

$$\frac{b^2 k_1^2}{m^3 m_1}$$

Vemos que se cumplen todas las condiciones de Routh-Hurwitz. Luego, si la masa m se está moviendo, lo hace con una solución del homogéneo, y por lo tanto se desvanece.

Observemos que la posición x_1 de la masa m_1 del absorbedor, satisface $m_1 x_1'' + k_1 x_1 = k_1 x$. Luego, su movimiento es suma de una solución del homogéneo, que es una vibración de frecuencia ω , más una particular que se desvanece, pues la entrada x es suma de exponenciales estables ninguna de las cuales produce resonancia en el absorbedor. Más adelante se estudiará el sistema completo.

Ejercicio

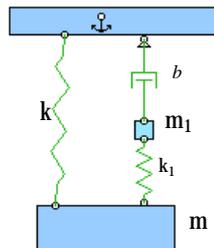
Considere el sistema mecánico de la figura que consiste de una masa colgante m y una pequeña masa m_1 como se indica en la figura y no hay acción externa. Sea x el desplazamiento vertical de m y x_1 el de m_1 .

a) Muestre que las ecuaciones del movimiento son

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -b x_1' + k_1(x - x_1) \\ m x'' = -k_1(x - x_1) - k x \end{cases}$$

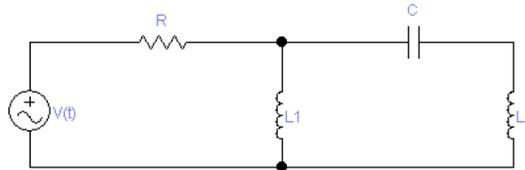
b) Si $m_1 = 0$ pruebe que x verifica la ecuación $\frac{b m}{k_1} x''' + m x'' + \frac{b(k+k_1)}{k_1} x' + k x = 0$ que es estable.

c) Si $m_1 = 0, m = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{4}, k = \frac{1}{6}, k_1 = \frac{1}{2}$ halle la solución si $x(0) = 1, x'(0) = 0, x_1(0) = 0$.



Ejemplo 3

En el circuito de la figura consideramos como variables las corrientes en las bobinas i_1 , i_2 y el potencial en el capacitor v .



Mediante las leyes de Kirchoff se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} & 0 \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

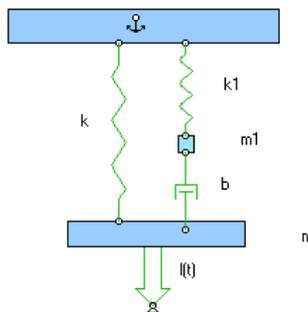
a) Si la salida es la caída de potencial en la resistencia: $v_R = (R, R, 0) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{pmatrix}$ no hay transferencia directa.

b) Si la salida es v_{L_1} : $v_{L_1} = (-R, -R, 0) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{pmatrix} + V(t)$ hay transferencia directa

Ejercicio

Considere el sistema mecánico de la figura que consiste en dos masas m y m_1 y se ejerce una fuerza vertical sobre m . Sea x el desplazamiento vertical de la masa m y x_1 el de m_1 .

Escriba matricialmente el sistema de orden 4 no homogéneo que simboliza las ecuaciones del movimiento.



Teorema de existencia y unicidad

Sea $F(t)$ un n -vector de funciones continuas en el intervalo (α, β) , t_0 un punto inicial, $\alpha < t_0 < \beta$, y X_0 una condición inicial. Existe una única solución $X(t)$ del sistema $X' = A X + F(t)$ definida y con derivada continua en todo el intervalo (α, β) y que verifica la condición inicial $X(t_0) = X_0$.

Si $F(t)$ es seccionalmente continua entonces $X(t)$ es continua con derivada seccionalmente continua.

Demostración

Existe una matriz invertible M tal que $J = M^{-1} A M$ es una matriz de Jordan que es triangular superior.

Con el cambio de variables $X = M Y$ el nuevo sistema $Y' = (M^{-1} A M) Y + M^{-1} F(t)$ tiene matriz triangular superior.

Supongamos entonces que el sistema es triangular superior y, para fijar mejor las ideas, que es de orden 3

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + f_1(t) \\x_2' &= a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + f_2(t) \\x_3' &= a_{33} x_3 + f_3(t)\end{aligned}$$

La última ecuación es lineal de primer orden para x_3 y por ello tiene una única solución $x_3(t)$ que verifica $x_3(t_0) = x_{03}$. Colocando esta solución en la segunda ecuación obtenemos una ecuación lineal de primer orden para x_2 : $x_2' = a_{22} x_2 + a_{23} x_3(t) + f_2(t)$ y por lo tanto tiene una única solución $x_2(t)$ con $x_2(t_0) = x_{02}$.

Reemplazando estas dos soluciones en la primera ecuación se obtiene una ecuación lineal de primer orden para x_1 : $x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2(t) + a_{13} x_3(t) + f_1(t)$ que tiene una única solución $x_1(t)$ con $x_1(t_0) = x_{01}$.

De esta manera obtenemos la solución $X(t)$ buscada.

Es sencillo demostrar que es única y que tiene las propiedades de continuidad y derivabilidad enunciadas.

q.e.d.

Teorema

El conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo de orden n es un espacio vectorial de dimensión n .

Demostración

Si X_1 y X_2 son dos soluciones y c_1 y c_2 son dos números entonces

$$(c_1 X_1 + c_2 X_2)' = c_1 X_1' + c_2 X_2' = c_1 A X_1 + c_2 A X_2 = A(c_1 X_1 + c_2 X_2)$$

y por lo tanto $c_1 X_1 + c_2 X_2$ es también una solución. Luego las soluciones forman un espacio vectorial.

Veamos que su dimensión es igual al orden del sistema n .

Sea e_1, \dots, e_n la base canónica de \mathbb{R}^n .

Para cada $1 \leq i \leq n$, por el teorema anterior, existe una solución $U_i(t)$ que verifica $U_i(0) = e_i$.

Demostremos que $U_1(t), U_2(t), \dots, U_n(t)$ forman una base de soluciones.

Son linealmente independientes pues si la solución nula es una combinación lineal de ellas

$$c_1 U_1(t) + c_2 U_2(t) + \dots + c_n U_n(t) = 0.$$

la evaluamos en $t = 0$ y queda

$$c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0.$$

Son generadores pues dada una solución $X(t)$ con $X(0) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, la combinación lineal $\alpha_1 U_1(t) + \alpha_2 U_2(t) + \dots + \alpha_n U_n(t)$ también es una solución que satisface la misma condición inicial que $X(t)$ y, como la solución es única, deben ser iguales: $X(t) = \alpha_1 U_1(t) + \alpha_2 U_2(t) + \dots + \alpha_n U_n(t)$

q.e.d.

Solución exponencial

Una ecuación homogénea de primer orden $x' = a x$ se resuelve mediante la exponencial

$$x(t) = k e^{at}, \quad x(0) = k \quad \text{donde} \quad e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n t^n$$

De igual manera se puede resolver el sistema homogéneo $X' = A X$

$$X(t) = e^{At} K, \quad X(0) = K \quad \text{donde} \quad e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

pues, derivando formalmente, obtenemos

$$X'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} n A^n t^{n-1} K = A \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n K = A X(t) \quad \text{y} \quad X(0) = K$$

Poniendo como condición inicial e_i , el i -ésimo vector canónico, obtenemos como solución la i -ésima columna de la matriz e^{At} . Luego las columnas de la matriz e^{At} forman una base del sistema homogéneo.

Los programas de computación permiten calcular e^{At} y $e^{At} K$. Por ejemplo

$$\text{MatrixExp}\left[\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}\right) t\right] // \text{MatrixForm}$$

$$\left(\begin{matrix} \frac{1}{3} e^{-t} (1 + 2 e^{3t}) & \frac{1}{3} e^{-t} (-1 + e^{3t}) \\ \frac{2}{3} e^{-t} (-1 + e^{3t}) & \frac{1}{3} e^{-t} (2 + e^{3t}) \end{matrix}\right)$$

$$\text{MatrixExp}\left[\left(\begin{matrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{matrix}\right) t, \{1, 0\}\right]$$

$$\left\{ \frac{1}{3} e^{t/2} \left(3 \cos\left[\frac{\sqrt{3} t}{2}\right] + \sqrt{3} \sin\left[\frac{\sqrt{3} t}{2}\right] \right), -\frac{2 e^{t/2} \sin\left[\frac{\sqrt{3} t}{2}\right]}{\sqrt{3}} \right\}$$

`MatrixExp` $\left[\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t \right]$ // N // Expand // MatrixForm

$$\begin{pmatrix} 0.276393 \cdot 2.71828^{0.381966t} + 0.723607 \cdot 2.71828^{2.61803t} & -0.447214 \cdot 2.71828^{0.381966t} + 0.447214 \cdot 2.71828^{2.61803t} \\ -0.447214 \cdot 2.71828^{0.381966t} + 0.447214 \cdot 2.71828^{2.61803t} & 0.723607 \cdot 2.71828^{0.381966t} + 0.276393 \cdot 2.71828^{2.61803t} \end{pmatrix}$$

Método de Euler

Buscaremos soluciones exponenciales $X(t) = K e^{\lambda t}$, donde K es un vector constante no nulo, para el sistema homogéneo de orden n : $X' = A X$. Reemplazando en la ecuación se obtiene la condición $\lambda K = A K$ lo cual significa que λ es un autovalor de la matriz A y K es un autovector asociado.

Ejemplo 1 $X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$

Calculando hallamos $\lambda_1 = -3$, $K_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\lambda_2 = 0$, $K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y las soluciones asociadas son

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{y} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2 $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$

Calculando hallamos $\lambda = 1 \pm i$, $K = \begin{pmatrix} \pm i \\ 1 \end{pmatrix}$ y con soluciones asociadas

$$X_1(t) = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1+i)t} \quad \text{y} \quad X_2(t) = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} e^{(1-i)t}$$

Caso I La matriz A es diagonalizable

Si A se puede diagonalizar hay una base de autovectores X_1, X_2, \dots, X_n con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Veamos que la soluciones $X_1 e^{\lambda_1 t}, \dots, X_n e^{\lambda_n t}$ forman una base. Como el espacio de soluciones tiene dimensión n basta ver que son linealmente independientes.

Supongamos que $c_1 X_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n X_n e^{\lambda_n t} = 0$ Evaluando en $t = 0$ obtenemos

$c_1 X_1 + \dots + c_n X_n = 0$ y, como X_1, X_2, \dots, X_n forman una base de \mathbb{R}^n , necesariamente $c_1 = \dots = c_n = 0$. Luego todas las soluciones son

$$X(t) = c_1 X_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n X_n e^{\lambda_n t}$$

Recordemos que para que una matriz se pueda diagonalizar es preciso que la multiplicidad algebraica de cada autovalor coincida con su multiplicidad geométrica.

Dos casos importantes en que se puede diagonalizar son los siguientes.

- i) La matriz A tiene autovalores distintos, reales o complejos.
- ii) La matriz A es real y simétrica. En este caso todos sus autovalores son reales y se diagonaliza en una base ortonormal.

Para el caso de autovalores complejos es útil el siguiente resultado para obtener bases reales.

Si A es una matriz real y $X = X_1 + i X_2$ es una solución compleja de $X' = A X$ entonces tanto la parte real X_1 como la parte imaginaria X_2 son también soluciones del sistema.

Ejemplo 1

En el ejemplo 1 anterior, como la matriz se diagonaliza, todas las soluciones son

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 2

En el ejemplo 2 anterior, la matriz se diagonaliza pero con raíces complejas. Tomando parte real y compleja, todas las soluciones se expresan en una base real

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} -e^t \operatorname{sen} t \\ e^t \operatorname{cos} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^t \operatorname{cos} t \\ e^t \operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

La matriz del sistema $X' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ es real simétrica.

Sus autovalores son $-1, 1$ con autovectores respectivos. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y las soluciones son

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Ejemplo 4

La matriz del sistema $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X$ tiene tres autovalores distintos $0, 1 \pm i\sqrt{2}$

Un autovector asociado a 0 es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y uno asociado a $1 + i\sqrt{2}$ es $\begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2}i \\ 1 - \sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}$.

Separando la parte real y compleja de la solución compleja

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\sqrt{2}i \\ 1 - \sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix} e^{(1+i\sqrt{2})t} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right] [\cos \sqrt{2}t + i \sin \sqrt{2}t] e^t$$

obtenemos todas las soluciones en una base real

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos \sqrt{2}t - 2\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \\ \cos \sqrt{2}t + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}t \\ 3 \cos \sqrt{2}t \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} \sin \sqrt{2}t + 2\sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \\ \sin \sqrt{2}t - \sqrt{2} \cos \sqrt{2}t \\ 3 \sin \sqrt{2}t \end{pmatrix} e^t$$

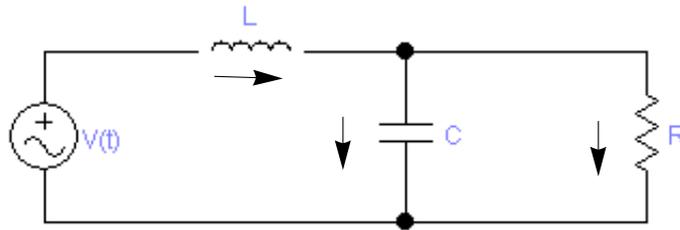
Ejercicio

a) Resolver los sistemas homogéneos $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$ y $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$.

b) Mostrar que el sistema homogéneo $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$ no es diagonalizable.

Ejemplo 5

El circuito de la figura se alimenta con un voltaje $V(t)$.



Las ecuaciones que verifican i_L , v_C son

$$\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

Consideremos el sistema homogéneo $V(t) = 0$.

i) Para $R = \frac{1}{3} \Omega$, $C = 1 F$, $L = \frac{1}{2} H$ la matriz se diagonaliza con raíces reales $-2, -1$ y las soluciones son

$$\begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

ii) Para $R = 1 \Omega$, $C = \frac{1}{2} F$, $L = 1 H$ la matriz se diagonaliza con raíces complejas $-1 \pm i$ y las soluciones son

$$\begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos t - \operatorname{sen} t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \cos t + \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix} e^{-t}$$

iii) Para $R = \frac{1}{2} \Omega$, $C = 1 F$, $L = 1 H$ la matriz no se diagonaliza y el único autovector da la solución $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$.

Para obtener una base se puede usar una base de Jordan como se discute en el próximo párrafo.

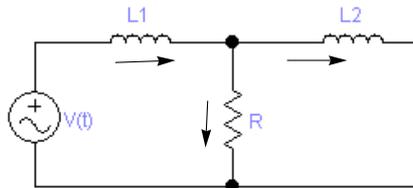
Ejercicio

a) Resolver los sistemas homogéneos $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$ y $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$.

b) Mostrar que el sistema homogéneo $X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} X$ no es diagonalizable.

Ejercicio

En el circuito de la figura hay un voltaje de entrada $V(t)$.



Las ecuaciones que verifican las corrientes en las bobinas i_1, i_2 son

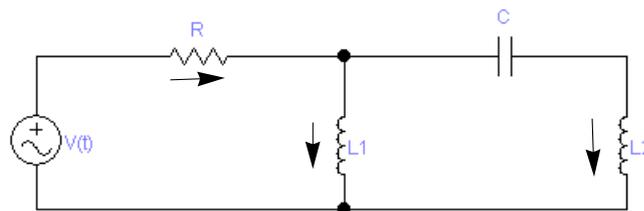
$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

Muestre que es diagonalizable para todas las constantes físicas y que un autovalor es cero..

- a) Resuelva el sistema para $R = 1 \Omega$, $L_1 = 1 H$, $L_2 = 1 H$ y $V(t) = 0$.
- b) Halle la solución para las condiciones iniciales $i_1(0) = 1$, $i_2(0) = 0$.

Ejercicio

Considere como variables del circuito las corrientes en las bobinas i_1, i_2 y el potencial en el capacitor v_C .



Muestre que el sistema que verifican es

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} & 0 \\ -\frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{1}{L_2} \\ 0 & \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$

Resuelva el sistema homogéneo para las constantes $R = 1 \Omega$, $L_1 = 1 H$, $L_2 = \frac{1}{2} H$, $C = \frac{1}{2} F$.

Rta:
$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) + \frac{\sqrt{7}}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \\ -\frac{1}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \\ \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} + c_3 \begin{pmatrix} -\frac{3}{8} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) - \frac{\sqrt{7}}{8} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \\ -\frac{1}{4} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) + \frac{\sqrt{7}}{4} \cos\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{7}}{2} t\right) \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}$$

Caso II La matriz no es diagonalizable. Bases de Jordan.

Si la matriz A no diagonalizable usando una base de Jordan obtendremos una base de soluciones.

i) Un solo bloque de Jordan.

Consideremos primero el caso en que A es similar a un solo bloque de Jordan.

Para claridad de ideas supongamos que es de orden 3

$$J_3(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Calculamos una base de Jordan u_1, u_2, u_3 : $A u_1 = \alpha u_1$, $A u_2 = u_1 + \alpha u_2$, $A u_3 = u_2 + \alpha u_3$ y construimos las siguientes funciones vectoriales

$$X_1(t) = u_1 e^{\alpha t}, \quad X_2(t) = (u_1 t + u_2) e^{\alpha t}, \quad X_3(t) = \left(u_1 \frac{t^2}{2!} + u_2 t + u_3\right) e^{\alpha t}$$

que reemplazadas en la ecuación $X' = A X$ se ve que son soluciones.

Además son linealmente independientes pues si una combinación lineal es la solución nula

$$c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t) + c_3 X_3(t) = 0$$

la evaluamos en $t = 0$ y queda $c_1 u_1 + c_2 u_2 + c_3 u_3 = 0$ y como los vectores eran una base los coeficientes son todos nulos. Como son 3, que es el orden del sistema, forman una base de soluciones.

ii) Si hay varios bloques de Jordan procedemos con cada uno de la manera anterior y así obtenemos n soluciones que serán linealmente independientes donde n es el orden del sistema y por lo tanto es una base.

Ejemplo 6

Consideremos el sistema triangular $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$.

Un autovalor es -1 y tiene multivalencia algebraica 2 y geométrica 1 y por lo tanto no es diagonalizable y el otro autovalor es -2 . Luego la forma de Jordan es

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ y una base de Jordan es } \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solución general es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Como el sistema es triangular, podemos resolverlo en forma directa desde abajo hacia arriba.

$$\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + x_2 + 2 x_3 \\ x_2' &= -2 x_2 + x_3 \\ x_3' &= -x_3 \end{aligned}$$

La última ecuación tiene la solución $x_3 = k_3 e^{-t}$.

Reemplazada en la segunda da $x_2' = -2 x_2 + k_3 e^{-t}$ cuya solución es $x_2 = k_2 e^{-2t} + k_3 e^{-t}$.

Reemplazando ambas en la primera da $x_1' = -x_1 + k_2 e^{-2t} + 3 k_3 e^{-t}$; buscamos una solución particular de la forma $K_2 e^{-2t} + t K_3 e^{-t}$ y encontramos $-k_2 e^{-2t} + 3 k_3 t e^{-t}$.

Luego $x_1 = k_1 e^{-t} - k_2 e^{-2t} + 3 k_3 t e^{-t}$. La solución general del sistema es

$$X(t) = k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t} + k_3 \begin{pmatrix} 3t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Ejercicio

Resolver los sistemas triangulares con los dos métodos anteriores

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} X \quad \text{y} \quad X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X$$

Ejercicio

Resolver los sistemas $X' = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X$ y $X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} X$.

Ejemplo 7

Sea $X' = AX$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ que tiene un único autovalor $\lambda = -2$ triple.

Hay dos autovectores independientes $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la matriz de Jordan es $\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Una base de Jordan es $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y la solución general es

$$X(t) = \left[c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] e^{-2t} = \begin{pmatrix} c_2 - c_3 \\ c_1 + c_2 t + c_3 \\ -c_1 - c_2 t \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Comprobamos que es solución.

$$\mathbf{x}[t_] := \begin{pmatrix} c_2 - c_3 \\ c_1 + c_2 t + c_3 \\ -c_1 - c_2 t \end{pmatrix} e^{-2t}$$

$$\mathbf{x}'[t] - \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}[t] // \text{Simplify}$$

$$\{\{0\}, \{0\}, \{0\}\}$$

Ejercicio

Compruebe que para $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es $J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y una base de Jordan es $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Escriba la solución general del sistema $X' = AX$ y determine la que verifica $X(0) = (1, 0, 1, 0)^T$.

Ejercicio

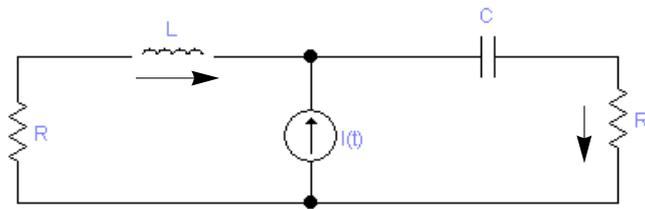
Halle una base de soluciones para los siguientes sistemas homogéneos:

$$X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X \quad X' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X \quad X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} X$$

$$X' = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -4 & -4 \end{pmatrix} X \quad X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} X \quad X' = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} X$$

Ejercicio

En el circuito de la figura, hay una corriente de entrada $I(t)$.



Muestre que las ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix} I(t)$$

- a) Para $R = 1 \Omega$, $C = 1 F$, $L = 1 H$ halle todas las soluciones del homogéneo.
 b) Idem para $R = 1 \Omega$, $C = 1/2 F$, $L = 1 H$.

Utilizando que la forma de Jordan es triangular superior destacamos dos consecuencias. La primera será importante en la unidad 2 y la segunda en la unidad 5.

Teorema 1

Sea A una matriz cuadrada de orden n y $q(\lambda) = b_0 + b_1 \lambda + \dots + b_r \lambda^r$ un polinomio.

Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son los autovalores de A , cada uno repetido de acuerdo a su multiplicidad, entonces los autovalores de la matriz $q(A) = b_0 I + b_1 A + \dots + b_r A^r$ son $q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)$.

Demostración

Utilizando la forma de Jordan triangulamos el sistema

$$J = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Calculando vemos que

$$q(J) = M^{-1} q(A) M \quad \text{y} \quad q(J) = \begin{pmatrix} q(\lambda_1) & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & q(\lambda_2) & \dots & a''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q(\lambda_n) \end{pmatrix}$$

Por la primera igualdad las matrices $q(A)$ y $q(J)$ son similares y por ello tienen los mismos autovalores. Por la segunda igualdad vemos que los autovalores de $q(J)$ son $q(\lambda_1), \dots, q(\lambda_n)$.

q.e.d.

En particular, los autovalores de A^k son $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ para $k = 2, 3, \dots$

Ejemplos

a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene autovalores $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ tiene el autovalor 2 doble.

c) Sea $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ y $q(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$.

La matriz A tiene autovalores $-2 \pm i$.

La matriz $q(A) = A^2 + A + I = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ tiene autovalores $2 \pm 3i$

Y precisamente $q(-2 \pm i) = (-2 \pm i)^2 + (-2 \pm i) + 1 = 2 \mp 3i$.

Teorema 2

Sea A una matriz cuadrada de orden n y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sus autovalores, cada uno repetido de acuerdo a su multiplicidad. Si $|\lambda_1| < 1, \dots, |\lambda_n| < 1$ entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$.

Demostración

Por el razonamiento del teorema anterior,

$$J = M^{-1} A M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow J^k = M^{-1} A^k M = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & a''_{12} & \dots & a''_{1n} \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & a''_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

Si $\lim_{k \rightarrow \infty} J^k = 0$ es claro que $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = \lim_{k \rightarrow \infty} M J^k M^{-1} = 0$.

Por ello, es suficiente demostrar el teorema para matrices triangulares superiores.

Lema

Sea A una matriz triangular superior con elementos diagonales de valor absoluto menor que 1.

Entonces $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$

Demostración

Sea $|A| = (|a_{ij}|)$ la matriz de los valores absolutos de A y ponemos

$$|A| \leq |B| \text{ si } |a_{ij}| \leq |b_{ij}|.$$

Es claro que $|A^k| \leq |A|^k$ y que si $|A| \leq |B|$ entonces $|A|^k \leq |B|^k$.

Sea $|a_{ii}| \leq \alpha < 1$, $1 \leq i \leq n$, y $|a_{ij}| \leq \beta$ para $1 \leq i, j \leq n$.

Para fijar mejor las ideas supongamos que el orden de las matrices es 3. Entonces

$$|A| \leq \alpha I + \beta E = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ con } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Es $E^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $E^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y por lo tanto, como I y E conmutan,

$$|A^k| \leq |A|^k \leq (\alpha I + \beta E)^k = \alpha^k I + k \alpha^{k-1} \beta E + \frac{1}{2} k(k-1) \alpha^{k-2} \beta^2 E^2$$

Luego el lema es consecuencia de los límites conocidos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} k \alpha^{k-1} \beta = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} k(k-1) \alpha^{k-2} \beta^2 = 0$$

q.e.d.

Ecuación no homogénea

Buscamos alguna solución de la ecuación no homogénea $X' = AX + P(t)e^{\lambda t}$ donde $P(t)$ es un vector polinomial.

Teorema

Sea $P(t)$ un n -vector de polinomios de grado $\leq k$ y λ un número real o complejo.

El sistema de orden n $X' = AX + P(t)e^{\lambda t}$ tiene una solución particular del mismo tipo

$X(t) = Q(t)e^{\lambda t}$ con $Q(t)$ un vector polinomial de grado $\leq r+k$ donde $r \geq 0$ es la

multiplicidad algebraica de λ como autovalor de la matriz A .

Demostración

Como en el teorema de existencia y unicidad, haciendo un cambio de variables, podemos suponer que la matriz es triangular superior. Para claridad expositiva trabajamos con un sistema de orden 3:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + p_1(t) e^{\lambda t} \\ x_2' &= a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + p_2(t) e^{\lambda t} \\ x_3' &= a_{33} x_3 + p_3(t) e^{\lambda t} \end{aligned}$$

Los autovalores de la matriz son los elementos diagonales a_{11}, a_{22}, a_{33} .

Si λ no es autovalor de A entonces, por el método de los coeficientes indeterminados, la última ecuación tiene una solución $q_3(t) e^{\lambda t}$ donde el polinomio $q_3(t)$ tiene el mismo grado que $p_3(t)$.

Reemplazando esta solución en la segunda ecuación queda $x_2' = a_{22} x_2 + (a_{23} q_3(t) + p_2(t)) e^{\lambda t}$ que tiene una solución del tipo $q_2(t) e^{\lambda t}$ con el grado de $q_2(t)$ igual al de $a_{23} q_3(t) + p_2(t)$.

Reemplazando estas dos soluciones en la primera ecuación, se obtiene de igual manera una solución $q_1(t) e^{\lambda t}$ con el grado de $q_1(t)$ igual al del polinomio $a_{12} q_2(t) + a_{13} p_3(t) + p_1(t)$. Luego, en la solución hallada $Q(t) e^{\lambda t}$, el grado de $Q(t)$ es menor o igual que el de $P(t)$.

Si λ es autovalor de A entonces aparece en la diagonal y por ello algunas de las tres ecuaciones producen resonancia y el grado de los polinomios de la solución aumenta. En total, no puede aumentar más que la cantidad de veces que aparece λ en la diagonal, que es justamente la multiplicidad del autovalor.

q.e.d.

Observaciones

i) Al cambiar variables en un sistema, tengamos en cuenta que si M es una matriz invertible, $M Q(t)$ es un polinomio vectorial del mismo grado que $Q(t)$.

ii) Si un sistema tiene la forma $X' = A X + B p(t) e^{\lambda t}$ con $p(t)$ un polinomio, debemos buscar una solución particular de la forma $X_p(t) = Q(t) e^{\lambda t}$ con $Q(t)$ un vector polinomial con

$$\text{grado } Q(t) \leq \text{grado } p(t) + \text{multiplicidad de } \lambda \text{ como raíz de } c_A(\lambda)$$

Ejemplo

Queremos hallar una solución del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Como -1 es raíz característica simple de la matriz del sistema, la entrada produce resonancia. Por ello, proponemos una solución de la forma $X(t) = (K_0 + K_1 t) e^{-t}$ que reemplazada en la ecuación impone las condiciones

$$A K_1 = -K_1 \text{ y } (A + I) K_0 = K_1 - B$$

Calculando obtenemos $K_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ y $K_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ debe verificar $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha - 1 \\ 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

Este sistema tiene determinante cero; por lo tanto, puede ser incompatible o compatible indeterminado dependiendo del valor de α . Para estudiarlo reducimos la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2\alpha \\ 1 & -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 2\alpha \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4\alpha \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 + F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ 0 & 1 & -2 & -4\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 - 4\alpha \end{pmatrix}$$

Luego es compatible si $\alpha = \frac{1}{4}$, y para ese valor queda el sistema $a - c = -\frac{3}{4}$, $b - 2c = -1$, una de cuyas soluciones es $c = 0$, $a = -\frac{3}{4}$, $b = -1$, y una solución particular del sistema es

$$X_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}t \\ -1 + \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{4}t \end{pmatrix} e^{-t}$$

Ejercicio 1

a) Comprobar que una solución particular del sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad X_p = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 4 + 2t \\ -5 + 2t \\ -6 - 8t \end{pmatrix}$$

b) Hallar la solución que verifica $X(0) = 0$.

Ejercicio 2

Hallar una solución particular de los sistemas

$$\text{a) } X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$\text{b) } X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$c) X' = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

Ejercicio 3

Hallar una solución particular de los sistemas

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \quad \text{y} \quad X' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

Ejercicio 4

a) Sea $X' = AX + B e^{\alpha t}$ con B vector constante.

Si α no es raíz característica de A probar directamente que hay una solución particular de la forma $X(t) = K e^{\alpha t}$ con K vector constante.

Si α es raíz característica de A , probar que hay una solución particular de la forma $K e^{\alpha t}$ con K vector constante si y sólo si B está en la imagen de la transformación lineal $\alpha I - A$.

b) Hallar la solución general de la ecuación $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$.

c) Para $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t}$ hay solución particular de la forma $X(t) = K e^{2t}$ aunque 2 es raíz característica.

d) Para $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$ hay soluciones de la forma $X(t) = (K_0 + t K_1) e^{2t}$ con $K_1 \neq 0$.

Estabilidad interna

El sistema $X' = AX + B f(t)$ se dice estable internamente si cada solución $X_0(t)$ del homogéneo

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} X_0(t) = 0$$

En ese caso, si el sistema está en reposo e inesperadamente adquiere condiciones iniciales no nulas, cuando la perturbación desaparece, retorna por sí solo al reposo.

Se llama estabilidad interna pues no interviene el vector de entradas B .

Teorema

Un sistema es internamente estable si y sólo si los autovalores de la matriz tienen parte real menor que cero.

Demostración

Por los resultados ya vistos las soluciones del homogéneo son de la forma

$$X_0(t) = \sum_{i=1}^s P_i(t) e^{\alpha_i t}$$

donde α_i son autovalores de A y $P_i(t)$ son vectores polinomiales. Utilizando esta expresión se deduce inmediatamente que si los autovalores tienen parte real menor que cero entonces $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_0(t) = 0$.

Recíprocamente, si es estable internamente y α es una raíz característica hay una solución no nula del sistema homogéneo del tipo $X_0(t) = K e^{\alpha t}$ y por lo tanto $\lim_{t \rightarrow +\infty} K e^{\alpha t} = 0$. Si k_i es una coordenada no nula de K , $\lim_{t \rightarrow +\infty} k_i e^{\alpha t} = 0$ y por lo tanto la parte real de α es menor que cero.

q.e.d.

Concluimos que para estudiar la estabilidad de un sistema hay que ver si el polinomio característico de la matriz del sistema es estable o no. Para ello se pueden utilizar las condiciones de Routh-Hurwitz.

Se demostrará en la unidad 2 que si un sistema lineal $X' = A X + B f(t)$ es internamente estable, para cada entrada acotada $f(t)$, todas las soluciones son acotadas.

Ello no es cierto en sistemas internamente inestables como se muestra en el ejemplo 2 más abajo.

Ejemplo 1

El sistema $X' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} f(t)$ es internamente estable pues su polinomio característico $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$ es estable.

Ejemplo 2

El sistema $X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} f(t)$ no es internamente estable pues un autovalor es 0.

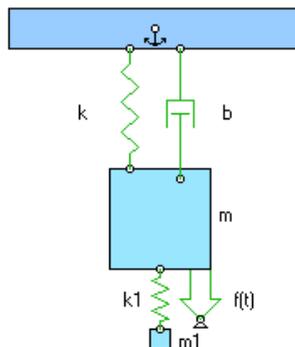
La entrada acotada $f(t) = 1$ produce resonancia y todas las respuestas son

$$X(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1+t \\ t \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

y ninguna de ellas es acotada.

Ejemplo 3 "Absorbedor de vibraciones"

Retomamos el ejemplo del sistema mecánico tratado en una sección anterior.



Si x y x_1 representan lo que se apartan las masas m y m_1 del equilibrio, tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} m x'' &= -k x - b x' - k_1 (x - x_1) + f(t) \\ m_1 x_1'' &= k_1 (x - x_1) \end{aligned}$$

Las variables de estado $y_1 = x$, $y_2 = x'$, $y_3 = x_1$, $y_4 = x_1'$ satisfacen el sistema:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k+k_1}{m} & -\frac{b}{m} & \frac{k_1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_1} & 0 & -\frac{k_1}{m_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} f(t)$$

cuyo polinomio característico es

$$c(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k+k_1}{m} & \lambda + \frac{b}{m} & -\frac{k_1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & 0 & \frac{k_1}{m_1} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^4 + \frac{b}{m} \lambda^3 + \left(\frac{k_1 m + k m_1 + k_1 m_1}{m m_1} \right) \lambda^2 + \frac{b k_1}{m m_1} \lambda + \frac{k k_1}{m m_1}$$

Ya hemos comprobado que $c(\lambda)$ es estable. Luego, si se quita la acción externa el sistema retorna al reposo.

Si la fuerza externa es $f(t) = a \operatorname{sen} \omega t$, para que una solución particular tenga $x = 0$ el sistema se reduce a

$$0 = k_1 x_1 + a \operatorname{sen} \omega t, \quad m_1 x_1'' + k_1 x_1 = 0$$

De la primera obtenemos $x_1(t) = -\frac{a}{k_1} \operatorname{sen} \omega t$ y colocada en la segunda queda la condición $\frac{k_1}{m_1} = \omega^2$.

Elegido el absorbedor de esta manera, una solución particular será $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = a \operatorname{sen} \omega t$, $y_4 = a \omega \cos \omega t$, y todas las soluciones serán suma de esta solución particular más una del homogéneo, que se apaga sola.

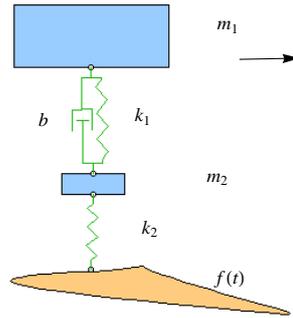
Conclusión: la masa m tiene un movimiento que se desvanece y la masa m_1 vibra a frecuencia ω más un transitorio.

Ejemplo 4 Modelo sencillo de suspensión

Consideremos una masa m_1 que se encuentra apoyada en un resorte de constante k_1 y un amortiguador de constante b .

A su vez, éstos se encuentran apoyados en una rueda de masa m_2 cuya cubierta actúa como un resorte de constante k_2 .

Los desplazamientos verticales de cada masa, desde el equilibrio, son respectivamente x_1 y x_2 . El móvil se desplaza a cierta velocidad hacia la derecha y la entrada es la altura del camino $f(t)$ en el tiempo respecto de la posición de equilibrio.



Se trata de "apagar" el movimiento vertical x_1 de la masa m_1 cuando el camino es plano, es decir, $f(t) = 0$. Para ello estudiamos la estabilidad interna del sistema.

$$m_1 x_1'' = b(x_2' - x_1') + k_1(x_2 - x_1) \quad m_2 x_2'' = -b(x_2' - x_1') - k_1(x_2 - x_1) - k_2(x_2 - f(t))$$

Con las variables de estado $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_2'$ el sistema es

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} f(t)$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ \frac{k_1}{m_1} & \lambda + \frac{b}{m_1} & -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ -\frac{k_1}{m_2} & -\frac{b}{m_2} & \frac{k_1+k_2}{m_2} & \lambda + \frac{b}{m_2} \end{pmatrix} = \lambda^4 + \left(\frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2}\right)\lambda^3 + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}\right)\lambda^2 + \frac{b k_2}{m_1 m_2} \lambda + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}$$

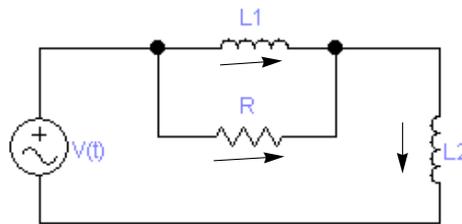
El polinomio tiene coeficientes positivos y verifica la última condición de Routh-Hurwitz para estabilidad pues

$$\text{Det} \left[\begin{pmatrix} \frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} & \frac{b k_2}{m_1 m_2} & 0 \\ 1 & \frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2} & \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} \\ 0 & \frac{b}{m_1} + \frac{b}{m_2} & \frac{b k_2}{m_1 m_2} \end{pmatrix} \right] // \text{Simplify}$$

$$\frac{b^2 k_2^2}{m_1 m_2^3}$$

Ejemplo

Consideremos el circuito de la figura que tiene un potencial $V(t)$ de entrada.



Las ecuaciones son

$$\begin{cases} L_1 i_1' = R(i_2 - i_1) \\ R(i_2 - i_1) + L_2 i_2' = v \end{cases} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} v(t)$$

La ecuación característica $\lambda^2 + R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)\lambda$ es inestable pues $\lambda = 0$ es raíz.

a) Para $R = 1 \Omega$, $L_1 = 1 H$, $L_2 = \frac{1}{2} H$ el sistema homogéneo tiene la solución general

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{y si } \alpha \neq 0 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto puede ocurrir que la resistencia no disipe una energía remanente.

Para la entrada constante $V(t) = 1$ volt como 0 es raíz característica buscamos una solución particular de la forma $K_0 + K_1 t$. Reemplazada en la ecuación nos provee la solución particular que sumada a la del homogéneo nos da todas las soluciones

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-3t} \quad \text{ó} \quad \begin{cases} i_1(t) = \frac{2}{3} t + \alpha + \beta e^{-3t} \\ i_2(t) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} t + \alpha - 2 \beta e^{-3t} \end{cases}$$

y ninguna es acotada. Luego con una entrada de 1 volt las bobinas se queman.

b) La salida $v_R = R(i_2 - i_1) = (-R, R) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$ satisface la ecuación internamente estable

$$\frac{L_2}{R} v_R' + \frac{L_1 + L_2}{L_1} v_R = V(t)$$

Se verá en la unidad 2 que a cada entrada acotada $V(t)$ la salida $v_R(t)$ es acotada. Luego observando la entrada y esta salida no podemos detectar la inestabilidad interna del sistema.

Sistemas en forma no estandar

a) Si un sistema es de la forma $C X' = A X + B f(t)$ con C una matriz inversible multiplicando por la inversa se lo lleva a la forma estandar: $X' = C^{-1} A X + C^{-1} B f(t)$.
Ver el ejemplo 1.

b) Si el sistema presenta la derivadas de la entrada: $X' = A X + B_1 f(t) + B_2 f'(t)$
resolvemos por separado: $X_1' = A X_1 + B_1 f(t)$ y $X_2' = A X_2 + B_2 f'(t)$

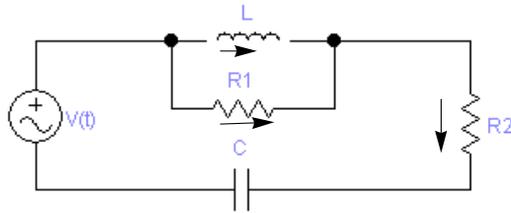
Reemplazando la suma $X = X_1 + X_2$ en la ecuación original vemos que es solución:

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2)' &= X_1' + X_2' = A X_1 + B_1 f(t) + A X_2 + B_2 f'(t) \\ &= A (X_1 + X_2) + B_1 f(t) + B_2 f'(t)\end{aligned}$$

Ver ejemplo 2

Ejemplo 1

Para el circuito de la figura, usamos como variables la corriente en la bobina i_L y el potencial en el capacitor v_C .
La salida y es la caída de potencial en la primera resistencia: $y = v_{R_1}$.



Si i_1, i_2 son las corrientes en las resistencias $i_1 + i_L = i_2$, $i_2 = C v_C' \Rightarrow i_1 = C v_C' - i_L$

Por la segunda ley de Kirchoff obtenemos: $L i_L' = R_1 i_1$ y $R_1 i_1 + R_2 i_2 + v_C = V(t)$

y eliminando i_1, i_2 quedan

$$L i_L' = R_1 (C v_C' - i_L) \quad C (R_1 + R_2) v_C' = R_1 i_L - v_C + v(t)$$

Escritas en forma matricial

$$\begin{pmatrix} L & -R_1 C \\ 0 & C(R_1 + R_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_1 & 0 \\ R_1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(t)$$

Multiplicando por la inversa queda

$$\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{L(R_1+R_2)} & -\frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ \frac{R_1}{C(R_1+R_2)} & -\frac{1}{C(R_1+R_2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R_1}{L(R_1+R_2)} \\ \frac{1}{C(R_1+R_2)} \end{pmatrix} v(t)$$

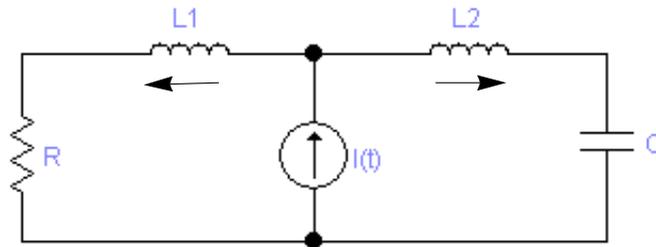
Para la salida usamos que: $i_L + i_1 = i_2$ y $R_1 i_1 + R_2 i_2 + v_C = v(t)$.

De ellas obtenemos la salida en la forma normal $y = C X + d v(t)$:

$$y = R_1 i_1 = -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} i_L - \frac{R_1}{R_1+R_2} v_C + \frac{R_1}{R_1+R_2} v(t) = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 R_2}{R_1+R_2} & -\frac{R_1}{R_1+R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \frac{R_1}{R_1+R_2} v(t)$$

Ejemplo 2

En el circuito de la figura la entrada es una corriente.



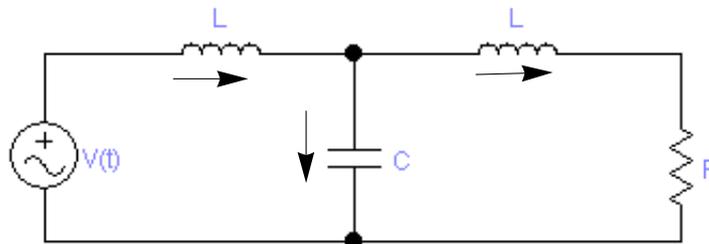
Las corrientes en las bobinas i_1 , i_2 , la primera hacia la izquierda y la segunda hacia la derecha, satisfacen $I(t) = i_1 + i_2$.

Se tiene

$$\begin{pmatrix} i_2' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1+L_2} & -\frac{1}{L_1+L_2} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_2 \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R}{L_1+L_2} \\ 0 \end{pmatrix} I(t) + \begin{pmatrix} \frac{L_1}{L_1+L_2} \\ 0 \end{pmatrix} I'(t)$$

Ejemplo 3 "filtro pasa bajos"

Consideremos nuevamente el circuito con un voltaje de entrada $V(t)$.



Consideremos como salida la caída de potencial v_R en la resistencia.

Planteamos las ecuaciones de las corrientes en las bobinas i_1 , i_2 y el potencial en el capacitor v_C :

$$\begin{cases} L i_1' + v_C = v(t) \\ L i_2' + R i_2 = v_C \\ C v_C' = i_1 - i_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{R}{L} & \frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} v(t) \quad v_R = (0, R, 0) \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v_C \end{pmatrix}$$

$$\text{Det} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{1}{L} \\ 0 & \lambda + \frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & \frac{1}{C} & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^3 + \frac{R}{L} \lambda^2 + \frac{2}{LC} \lambda + \frac{R}{CL^2}$$

Es estable pues satisface las condiciones de Ruth-Hurwitz: los coeficientes son positivos y $\left(\frac{R}{L}\right)\left(\frac{2}{LC}\right) > \frac{R}{CL^2}$.

La ecuación para la salida v_R se encuentra eliminando las otras variables:

$$\frac{CL^2}{R} v_R''' + CL v_R'' + \frac{2L}{R} v_R' + v_R = v(t)$$

$$H(z) = \frac{R}{CL^2 z^3 + LCR z^2 + 2Lz + R} \quad \text{y para } V(t) = A e^{i\omega t} \quad \text{la salida estacionaria es } A H(i\omega) e^{i\omega t}.$$

$$H(i\omega) = \frac{R}{[R-LCR\omega^2] + i\omega(2L-\omega^2 L^2 C)} \Rightarrow |H(i\omega)| = \frac{R}{\sqrt{[R-LRC\omega^2]^2 + \omega^2(2L-\omega^2 L^2 C)^2}}$$

Para frecuencias bajas: $\omega \approx 0$, $|H(i\omega)| \approx 1$ y las amplitudes no cambian sensiblemente.

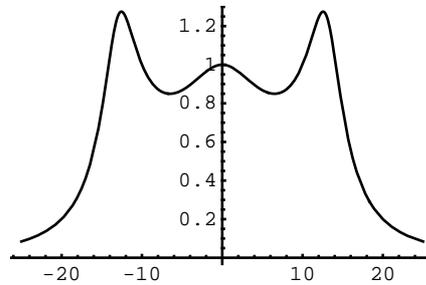
Para frecuencias altas: $\omega \gg 0$, $|H(i\omega)| \approx \frac{R}{CL^2 \omega^3} \approx 0$ y se reduce mucho su amplitud.

Veamos un ejemplo.

```

r = 1; c = 0.1; l = 0.1;
H[z_] :=  $\frac{r}{c l^2 z^3 + c l r z^2 + 2 l z + r}$ ;
NSolve[c l^2 z^3 + c l r z^2 + 2 l z + r == 0, z]
Plot[Abs[H[i ω]], {ω, -25, 25}];
{{z → -5.6984}, {z → -2.1508 - 13.0714 i}, {z → -2.1508 + 13.0714 i}}

```



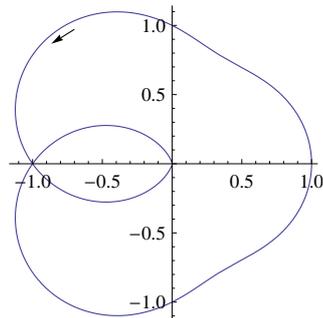
Se ve que para frecuencias ω entre -14.5 y 14.4 , $0.8 \leq |H(i\omega)| \leq 1.3$,
y para frecuencias $|\omega| \geq 25$, $|H(i\omega)| \leq 0.1$.

El gráfico de $H(i\omega)$ como curva en el plano es el siguiente.

```

r = 1; c = 0.1; l = 0.1;
H[z_] :=  $\frac{r}{c l^2 z^3 + c l r z^2 + 2 l z + r}$ ;
ParametricPlot[{Re[H[i ω]], Im[H[i ω]]}, {ω, -40, 40}]

```



Ecuaciones de orden mayor

Consideremos una ecuación de segundo orden homogénea con matrices cuadradas A y B

$$X'' + A X' + B X = 0$$

En vez de llevarlas a orden 1 con variables de estado proponemos directamente una solución exponencial $X(t) = K e^{\lambda t}$ que reemplazada en la ecuación nos da la condición $(\lambda^2 I + A \lambda + B) K = 0$. Para que exista solución $K \neq 0$ la matriz $\lambda^2 I + A \lambda + B$ no debe tener inversa: $\det(\lambda^2 I + A \lambda + B) = 0$.

Ejemplo

Para el absorbedor de vibraciones se obtuvieron las ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 - b x_1' - k_2 (x_1 - x_2) + a \sin \omega t \\ m_2 x_2'' &= k_2 (x_1 - x_2) \end{aligned}$$

La parte homogénea se escriben matricialmente así

$$X'' + \begin{pmatrix} \frac{b}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} X = 0$$

Las soluciones del tipo $K e^{\lambda t}$ reemplazadas en la ecuación verifican $\begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{b}{m_1} \lambda + \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \lambda^2 + \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} K = 0$

Hay solución K no nulo si el determinante de la matriz es nulo: $\det \begin{pmatrix} \lambda^2 + \frac{b}{m_1} \lambda + \frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \lambda^2 + \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} = 0$

Ejemplo Dos masas unidas a tres resortes

.

Dos masas están unidas a tres resortes de igual constante k y se mueven horizontalmente sin fricción.

Suponemos que realizan pequeñas vibraciones.

Indicamos con x_1 el desplazamiento de la primera masa desde su posición de equilibrio y x_2 el de la segunda, ambas medidas en forma positiva hacia la derecha.

Para la instantánea con $0 < x_1 < x_2$, el primer resorte está estirado x_1 , el segundo resorte está estirado

$x_2 - x_1$ y el tercero está comprimido x_2 . Aplicando la segunda ley de Newton a cada masa se tiene

$$\begin{cases} m_1 x_1'' = -k_1 x_1 + k_2 (x_2 - x_1) \\ m_2 x_2'' = -k_2 (x_2 - x_1) - k_3 x_2 \end{cases}$$

Si $k_1 = k_2 = k_3 = k$, $m_1 = m_2 = m$ y abreviando $\alpha = k/m$ el sistema es

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\alpha & \alpha \\ \alpha & -2\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad X'' = A X$$

Proponiendo una solución exponencial $X = K e^{\lambda t}$ y reemplazándola en la ecuación obtenemos que λ^2 es autovalor de la matriz A y K es un autovector asociado.

Un autovalor es $\lambda^2 = -\alpha$ con autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm \sqrt{\alpha} i$ y las soluciones $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\pm \sqrt{\alpha} i t}$

El otro autovalor es $\lambda^2 = -3\alpha$ con autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda = \pm \sqrt{3\alpha} i$ y las soluciones $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{\pm \sqrt{3\alpha} i t}$

Tomando parte real y compleja de las soluciones obtenemos la solución general en una base real

$$X(t) = (c_1 \cos \sqrt{\alpha} t + c_2 \sin \sqrt{\alpha} t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (c_3 \cos \sqrt{3\alpha} t + c_4 \sin \sqrt{3\alpha} t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hay dos tipos de movimientos sencillos

$X_1(t) = (c_1 \cos \sqrt{\alpha} t + c_2 \sin \sqrt{\alpha} t) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ las masa oscilan hacia el mismo lado con frecuencia $\frac{\sqrt{\alpha}}{2\pi}$ Hertz

$X_2(t) = (c_3 \cos \sqrt{3\alpha} t + c_4 \sin \sqrt{3\alpha} t) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ las masa oscilan en oposición con frecuencia mayor $\frac{\sqrt{3\alpha}}{2\pi}$ Hertz

El movimiento general es una suma de ambos tipos y resulta más complicado. Por ejemplo, hallar la solución para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$ y tratar de visualizar el movimiento.

Ejercicio

a) Probar que las ecuaciones del sistema de dos masas del ejemplo anterior no habiendo fricción son

$$X'' = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2+k_3}{m_2} \end{pmatrix} X$$

b) Veamos que las raíces características de esta matriz son negativas y distintas.

El polinomio característico es $\lambda^2 + \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)\lambda + \frac{k_1 k_2+k_2 k_3+k_1 k_3}{m_1 m_2}$ y el discriminante es

$$\begin{aligned} \left(\frac{k_1+k_2}{m_1} + \frac{k_2+k_3}{m_2}\right)^2 - 4 \frac{k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}{m_1 m_2} &= \frac{[(k_1+k_2)m_2 + (k_2+k_3)m_1]^2 - 4(k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3)m_1 m_2}{m_1^2 m_2^2} \\ &= \frac{[(k_1+k_2)m_2 - (k_2+k_3)m_1]^2 + 2k_2^2 m_1 m_2}{m_1^2 m_2^2} > 0 \end{aligned}$$

Luego las raíces son reales y distintas. Como el polinomio es estable, las raíces son negativas.

c) Utilizando este resultado concluir que las masas vibran y describir una base de soluciones.

Naturalmente el sistema físico es inestable.

Ejercicio

a) Probar que las ecuaciones del sistema siguiente no habiendo fricción son $X'' = \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} X$

b) Probar que las raíces características son negativas y distintas. Describir una base de soluciones.

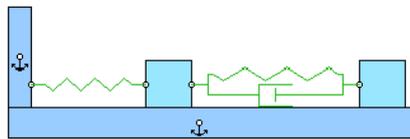
c) Para $m_1 = 10$, $m_2 = 5$, $k_1 = 80$, $k_2 = 40$ calcular el movimiento general.

Particularizar para las condiciones iniciales $x_1(0) = 1$, $x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$.

Ejercicio

a) Probar que las ecuaciones del sistema de la figura habiendo fricción sólo en el amortiguador son

$$X'' = \begin{pmatrix} -\frac{b}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ \frac{b}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix} X' + \begin{pmatrix} -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} X$$



b) Resolver el sistema para $m_1 = m_2 = 1$, $k_1 = k_2 = 1$, $b = 1$ con exponenciales: $X = K e^{\alpha t}$.

c) Llevarlo a primer orden con variables de estado $y_1 = x_1$, $y_2 = x_1'$, $y_3 = x_2$, $y_4 = x_2'$ y probar que es internamente estable.

Ejercicio

Estudiar de la misma manera el sistema.

Ejercicio

Generalizamos el ejemplo anterior a tres masas iguales con cuatro resortes iguales..

Mostrar que el sistema de ecuaciones es $X'' = A X$ con $A = \alpha \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y $\alpha = \frac{k}{m}$. Para $\alpha = 1$

$$\text{Eigensystem} \left[\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \right]$$

$$\left\{ \left\{ -2, -2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2} \right\}, \left\{ -1, 0, 1 \right\}, \left\{ 1, -\sqrt{2}, 1 \right\}, \left\{ 1, \sqrt{2}, 1 \right\} \right\}$$

Describir los tres movimientos elementales y sus frecuencias.

Ejercicio

Sean dos masas iguales unidas por un resorte y sin fricción.

Consideramos su movimiento únicamente en la línea horizontal que las une.

Consideramos los desplazamientos de las masas x_1, x_2 respecto de una posición de equilibrio de cada una.

Las ecuaciones son

$$\begin{aligned} m x_1'' &= k(x_2 - x_1) & \text{o sea} & & X'' &= \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha \\ \alpha & -\alpha \end{pmatrix} X & \text{con } \alpha &= \frac{k}{m} \\ m x_2'' &= -k(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

Si la salida es $y = x_2 - x_1$ se verifica $y'' + \frac{2k}{m} y = 0$ y la solución es $y(t) = c_1 \cos \sqrt{2\alpha} t + c_2 \sin \sqrt{2\alpha} t$

Ejercicio

Sean dos masas que se mueven sin fricción sobre la recta que las une como en el ejercicio anterior, pero unidas por un resorte y un amortiguador. Escribir las ecuaciones del movimiento y estudiar su estabilidad.

ECUACION DE UNA SALIDA

En un sistema lineal de orden n $X' = A X + B f(t)$ una salida $y(t)$ es una combinación lineal de los estados y de la entrada $y = C X + d f(t)$. El término $d f(t)$ es la transferencia directa.

Parámetros de Markov

Los números $h_i = C A^i B$ se llaman "parámetros de Markov" y son importantes pues con ellos se

escribe la ecuación diferencial de la salida, según se demuestra en el siguiente teorema.

Teorema Sea $p_A(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$ el polinomio característico de la matriz A .

La ecuación diferencial de la salida $y = C X + d f(t)$ es

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \sum_{i=0}^{n-1} h_i (f^{(n-i-1)} + a_1 f^{(n-i-2)} + \dots + a_{n-i-1} f) + d(f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f)$$

Demostración

Consideremos primero una salida sin transferencia directa $y = C X$ y con $n = 2$.

Derivamos sucesivamente la igualdad $y = C X$

$$y' = C X' = C(A X + B f) = C A X + C B f$$

$$y'' = C A X' + C B f' = C A^2 X + C A B f + C B f'$$

Por el teorema de Cayley-Hamilton, $A^2 + a_1 A + a_2 I = 0$, por lo tanto $A^2 = -a_1 A - a_2 I$.

Reemplazada en la igualdad anterior nos da

$$y'' = C(-a_1 A - a_2 I) X + C A B f + C B f' = -a_1 C A X - a_2 C X + C A B f + C B f' = -a_1(y' - C B f) - a_2 y + C A B f + C B f'$$

y reordenando queda

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = C B(f' + a_1 f) + C A B f = h_0(f' + a_1 f) + h_1 f$$

Siguiendo el mismo camino, se obtiene

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = h_0(f'' + a_1 f' + a_2 f) + h_1(f' + a_1 f) + h_2 f$$

$$y^{(4)} + a_1 y''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = h_0(f''' + a_1 f'' + a_2 f' + a_3 f) + h_1(f'' + a_1 f' + a_2 f) + h_2(f' + a_1 f) + h_3 f$$

En orden n se obtiene la ecuación

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \sum_{i=0}^{n-1} h_i (f^{(n-i-1)} + a_1 f^{(n-i-2)} + \dots + a_{n-i-1} f)$$

Si $y = C X + d f$ entonces $C X = y - d f$ verifica la ecuación anterior. Reemplazando y reordenando queda la ecuación del enunciado.

q.e.d.

Observaciones

a) Si $d = 0$ y $h_0 = \dots = h_{m-1} = 0$, $h_m \neq 0$ la derivada de orden mayor de f en la ecuación es $f^{(n-m-1)}$.

b) También se puede escribir la ecuación como un "polinomio" en las derivadas de la entrada

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = \sum_{k=0}^{n-1} b_k f^{(n-k-1)} + d(f^{(n)} + a_1 f^{(n-1)} + \dots + a_n f)$$

usando los coeficientes $b_k = \sum_{i=0}^k h_i a_{k-i}$ y $a_0 = 1$

Esta expresión destaca los dos polinomios importantes vinculados al sistema con una salida, a saber,

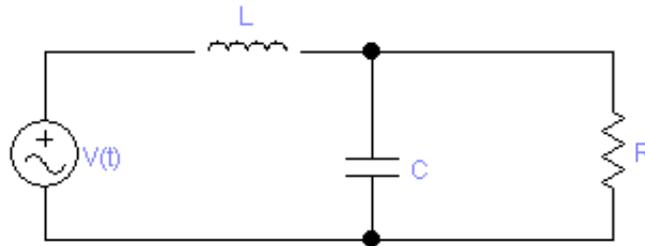
$$p_A(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n \quad \text{y} \quad q(\lambda) = b_0 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1}$$

Ejercicio

Probar que los parámetros de Markov no dependen del sistema de coordenadas.

Ejercicio

En el circuito de la figura.



i_L y v_C verifican $\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$ y $p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{LC}$

a) Si la salida es la caída de potencial en la resistencia $y(t) = v_R = v_C$, verificar que la ecuación es

$$y'' + \frac{1}{RC} y' + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{CL} V(t)$$

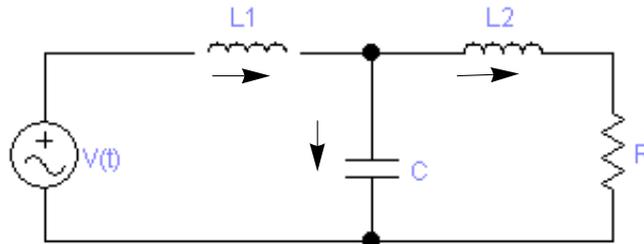
b) Si la salida es la corriente en la bobina $y(t) = i_L$, probar que la ecuación es

$$y'' + \frac{1}{RC} y' + \frac{1}{LC} y = \frac{1}{CLR} V(t) + \frac{1}{L} V'(t)$$

Ejemplo

En el circuito de la figura las corrientes en las bobinas y el potencial en el capacitor i_1 , i_2 , v verifican

$$\begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{R}{L_2} & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} V(t)$$



El polinomio característico es $p_A(\lambda) = \lambda^3 + \frac{R}{L_2} \lambda^2 + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \lambda + \frac{R}{CL_1 L_2}$

a) Si la salida es el potencial en la primera bobina $y(t) = -v + V(t)$:

$$C = (0, 0, -1), \quad d = 1, \quad CB = 0, \quad CAB = -\frac{1}{CL_1}, \quad CA^2B = 0$$

y la ecuación es

$$y''' + \frac{R}{L_2} y'' + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) y' + \frac{R}{CL_1 L_2} y = V(t)''' + \frac{R}{L_2} V(t)'' + \frac{1}{CL_2} V(t)'$$

b) Para la salida $v_R = R i_2$:

$$C = (0, 1, 0), \quad d = 0, \quad CB = 0, \quad CAB = 0, \quad CA^2B = \frac{R}{CL_1 L_2}$$

y la ecuación es

$$v_R''' + \frac{R}{L_2} v_R'' + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) v_R' + \frac{R}{CL_1 L_2} v_R = \frac{R}{CL_1 L_2} V(t)$$

Nota

Se sabe que la matriz A satisface un polinomio minimal $m_A(\lambda) = \lambda^m + c_1 \lambda^{m-1} + \dots + c_m$: $m(A) = 0$ con

$m \leq n$. En el teorema anterior, con igual demostración, se puede reemplazar $p_A(\lambda)$ por este polinomio, obteniendo que la salida satisface una ecuación de orden eventualmente menor.

Ejemplo 3 Suspensión de un móvil

En un ejemplo anterior se estudió el sistema que satisface la suspensión de un móvil

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_2}{m_2} \end{pmatrix} f(t)$$

El polinomio característico es $\lambda^4 + b\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\lambda^3 + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}\right)\lambda^2 + \frac{bk_2}{m_1 m_2}\lambda + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}$

Si la salida es el movimiento vertical del chasis $y = y_1 = C Y$ donde $C = (1, 0, 0, 0)$, su ecuación es

$$y'''' + a_1 y'''' + a_2 y'' + a_3 y' + a_4 y = C B (f'''' + a_1 f'' + a_2 f' + a_3 f) + C A B (f'' + a_1 f' + a_2 f) + C A^2 B (f' + a_1 f) + C A^3 B f$$

Calculamos los parámetros de Markov : $C A^i B$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_1}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{pmatrix}; B = \left\{0, 0, 0, \frac{k_2}{m_2}\right\}; c = \{1, 0, 0, 0\};$$

$\{c.B, c.A.B, c.A.A.B, c.A.A.A.B\}$

$$\left\{0, 0, \frac{bk_2}{m_1 m_2}, \frac{k_2 \left(-\frac{b^2}{m_1^2} + \frac{k_1}{m_1} - \frac{b^2}{m_1 m_2}\right)}{m_2}\right\}$$

Con esos parámetros la ecuación de la salida es

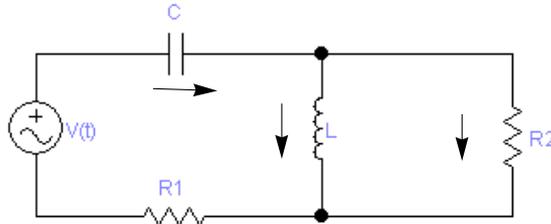
$$y'''' + b\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)y'''' + \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2}\right)y'' + \frac{bk_2}{m_1 m_2}y' + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}y = \frac{bk_2}{m_1 m_2}f' + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2}f$$

Ejercicio

En el circuito de la figura, considerar como variables de estado i_L y v_C , y como salida la caída de potencial en la segunda resistencia. Mostrar que

$$v_{R_2} = -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L - \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_C + \frac{R_2}{R_1 + R_2} V(t)$$

y hallar la ecuación que satisface.

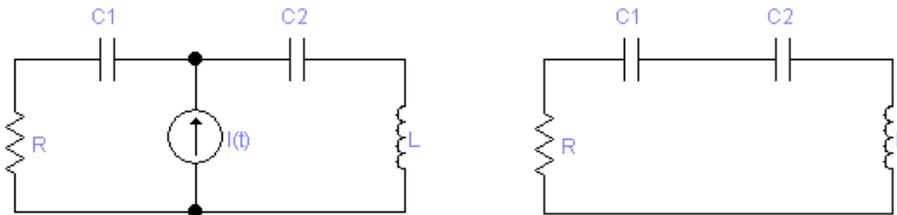


Ejemplo

En el circuito de la figura la entrada es una corriente $I(t)$.

En la figura derecha se tiene $I(t) = 0$ o sea el sistema sin acción externa.

Consideramos como variables la corriente en la bobina i y los voltajes en los capacitores v_1, v_2 .



a) El sistema de ecuaciones es

$$\begin{pmatrix} i \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R}{L} \\ -\frac{1}{C_1} \\ 0 \end{pmatrix} I(t)$$

y el polinomio característico $p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{R}{L} \lambda^2 + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) \lambda$ es inestable.

La raíz inestable $\lambda = 0$ produce el autovector $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y la solución constante $X_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Este vector de estados da $i(t) = 0$, $v_1(t) = 1$, $v_2(t) = -1$ y hay energía que no se disipa.

b) Si exitamos el sistema usando esta raíz: $I(t) = 1 = 1 e^{0t}$ una solución particular será de la forma $X_p(t) = K_0 + K_1 t$ que colocada en la ecuación $X' = A X + B$ da las condiciones

$$A K_1 = 0, \quad A K_0 = K_1 - B$$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ -b \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad K_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad \begin{pmatrix} -\frac{R}{L}x - \frac{1}{L}y - \frac{1}{L}z \\ \frac{1}{C_1}x \\ \frac{1}{C_2}x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} \\ b + \frac{1}{C_1} \\ -b \end{pmatrix}$$

Es compatible indeterminado y una solución es $b = -\frac{1}{C_1 + C_2}$, $x = \frac{C_2}{C_1 + C_2}$, $y = \frac{R C_1}{C_1 + C_2}$, $z = 0$

$$\text{y la solución particular } X_p(t) = \begin{pmatrix} \frac{C_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{R C_1}{C_1 + C_2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{C_1 + C_2} \\ \frac{1}{C_1 + C_2} \end{pmatrix} \quad \text{y todas son } X(t) = X_p(t) + X_0(t)$$

donde $X_0(t)$ es solución del homogéneo que es acotada. Los voltajes en los capacitores verifican

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_1(t) = -\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} v_2(t) = +\infty$$

y se cargan en forma explosiva.

c) Si consideramos la salida $y = v_1 = (0, 1, 0) X$ se tienen los parámetros de Markov

$$C B = -\frac{1}{C_1}; \quad C A B = \left(\frac{1}{C_1}, 0, 0\right) B = \frac{R}{L C_1}; \quad C A^2 B = \left(-\frac{R}{L C_1}, -\frac{1}{L C_1}, -\frac{1}{L C_1}\right) B = -\frac{R^2}{L^2 C_1} + \frac{1}{L C_1^2}$$

Recordemos que si $p(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3$ entonces la ecuación es

$$y''' + a_1 y'' + a_2 y' + a_3 y = C B f''(t) + (a_1 C B + C A B) f'(t) + (a_2 C B + a_1 C A B + C A^2 B) f(t)$$

Luego la ecuación de v_1 es

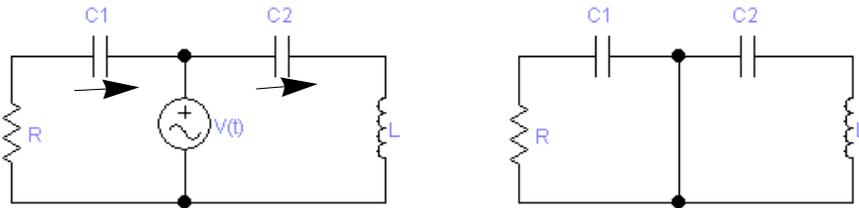
$$v_1''' + \frac{R}{L} v_1'' + \frac{1}{L} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) v_1' = -\frac{1}{C_1} I''(t) - \frac{1}{L C_1 C_2} I(t)$$

Ejercicio

En el circuito de la figura la entrada es un voltaje $V(t)$.

En la figura derecha se tiene $V(t) = 0$, o sea, el sistema sin acción externa.

Considere como variables la corriente en la bobina i y los voltajes en los capacitores v_1, v_2 .



Muestre que el sistema que verifican es

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L} \\ 0 & -\frac{1}{RC_1} & 0 \\ \frac{1}{C_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} \frac{R}{L} \\ -\frac{1}{RC_1} \\ 0 \end{pmatrix} I(t)$$

y que el polinomio característico es inestable

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{RC_1} \lambda^2 + \frac{1}{LC_2} \lambda + \frac{1}{RLC_1C_2} = \left(\lambda^2 + \frac{1}{LC_2}\right) \left(\lambda + \frac{1}{RC_1}\right)$$

Halle la ecuación de v_R .

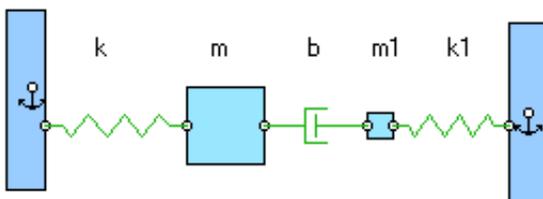
Ejercicio

En el sistema mecánico del esquema, se ejerce una fuerza horizontal $f(t)$ sobre la masa m , y la masa m_1 es despreciable. Las ecuaciones del movimiento son

$$m x'' = -k x + b(x_1' - x') + f(t)$$

$$m_1 x_1'' = 0 = -k_1 x_1 - b(x_1' - x')$$

Escriba el sistema en variables de estado, estudie la estabilidad y halle la ecuación de la salida x .



PLANO DE LAS FASES

Para discutir con precisión la geometría de un sistema de orden 2 es conveniente tener en cuenta los siguientes puntos.

1. Sea $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ una base del plano y $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

El ángulo α entre los vectores u_1 y u_2 verifica: $0 < \alpha < \pi$,

$$\cos \alpha = \frac{u_1 \cdot u_2}{|u_1| |u_2|} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{|u_1| |u_2|} \quad \text{y} \quad \sin \alpha = \frac{|a_1 b_2 - a_2 b_1|}{|u_1| |u_2|} = \frac{|\det(M)|}{|u_1| |u_2|}$$

1a) Si $\det(M) > 0$, calculando obtenemos $R_\alpha(u_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{|u_1|}{|u_2|} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{|u_1|}{|u_2|} u_2$,

o sea, al girar en sentido antihorario u_1 un ángulo α , obtenemos un múltiplo positivo de u_2 ; la base se dice **directa**.

1b) Si $\det(M) < 0$, calculando llegamos a $R_{-\alpha}(u_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \frac{|u_1|}{|u_2|} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \frac{|u_1|}{|u_2|} u_2$,

o sea, al girar en sentido horario u_1 un ángulo α , obtenemos un múltiplo positivo de u_2 ; la base se dice **indirecta**.

La base $u_1 = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix}$ es directa si y sólo si $ac > 0$.

Si una base u_1, u_2 es directa entonces para cada ángulo θ , la base rotada $R_\theta u_1, R_\theta u_2$ es directa.

En efecto, el ángulo α se conserva por rotación, y si $R_\alpha(u_1) = \lambda u_2$ con $\lambda > 0$ entonces

$R_\theta R_\alpha(u_1) = \lambda R_\theta u_2$ ó $R_\alpha R_\theta(u_1) = \lambda R_\theta u_2$ y la base $R_\theta u_1, R_\theta u_2$ es directa.

2a) Sea $\det(M) > 0$, o sea, la base u_1, u_2 es directa.

Sea θ el ángulo que verifica: $0 \leq \theta < 2\pi$, $R_\theta(u_1) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$, $a > 0$. Entonces $R_\theta M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ con $c > 0$.

Con la inversa de la homotecia no homogénea $H_{a,c} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ la matriz queda $H_{a^{-1},c^{-1}} R_\theta M = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Finalmente, con el inverso del trasquilado $T_e = \begin{pmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ obtenemos $T_{-e} H_{a^{-1}, c^{-1}} R_\theta M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejando M obtenemos $M = R_{2\pi-\theta} H_{\alpha, \gamma} T_e$, es decir, la transformación lineal dada por M es la composición de un trasquilado, una homotecia no homogénea y una rotación.

2b) Sea $\det(M) < 0$, o sea, la base u_1, u_2 es indirecta.

Consideremos la simetría respecto del eje x : $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Entonces $\det(SM) > 0$ y, por 2a), $SM = R_{2\pi-\theta} H_{\alpha, \gamma} T_e$; como $S = S^{-1}$, resulta $M = S R_{2\pi-\theta} H_{\alpha, \gamma} T_e$.

Luego, la transformación lineal dada por M es la composición de un trasquilado, una homotecia no homogénea, una rotación y una simetría.

3. Sea $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ una curva en el plano; sea $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$ una base y $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$.

Si las coordenadas de la curva en esta base son $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ entonces

$$X(t) = y_1(t) u_1 + y_2(t) u_2 = y_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + y_2 \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t) \\ b_1 y_1(t) + b_2 y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = M Y(t)$$

La curva $X(t)$ es la imagen por la transformación lineal dada por la matriz M de la curva $Y(t)$.

Si la matriz M tiene determinante positivo, o sea, la base u_1, u_2 es directa, M es composición de un trasquilado, una homotecia no homogénea y una rotación.

Si el determinante de M es negativo, o sea, la base u_1, u_2 es indirecta, M es composición de un trasquilado, una homotecia no homogénea, una rotación y una simetría.

Algunos ejemplos gráficos, nos permitirán apreciar el efecto de diversas M , sobre una curva.

Ejemplos

Sea $Y(t) = \begin{pmatrix} t \cos(2t) \\ t \sin(2t) \end{pmatrix}$ una espiral y $Z(t) = \begin{pmatrix} t \log |t| \\ t \end{pmatrix}$ una letra S .

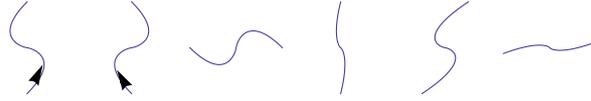
Las transformamos, sucesivamente, por una simetría respecto del eje vertical, una rotación de 90° , una homotecia no homogénea, un trasquilado y la composición de todas ellas.

Con la simetría, quedan las imágenes especulares, y el recorrido se simetriza. Con las otras transformaciones, sufre cambios de posición y deformaciones.

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\};$$

```
GraphicsGrid[Table[
  ParametricPlot[M[[i]].{t Cos[2 t], t Sin[2 t]}, {t, 0, 2 Pi}, Axes -> False], {i, 1, 6}]]
GraphicsGrid[Table[ParametricPlot[M[[i]].{t Log[Abs[t]], t},
  {t, -1, 1}, Axes -> False], {i, 1, 6}]]
```





La simetría es una transformación que esconde su complejidad.

1. La palabra *ambulancia*, se escribe en el frente del vehículo aludido, con su imagen especular.

Intente hacerlo y verá que, lo más fácil, es tomar un espejo y copiar lo que se ve.

2. Si frente a un espejo, aleja de su nariz el dedo índice, la imagen especular del dedo se acerca a usted.

Plano de las fases

Consideremos un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales homogéneas:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ x_2' = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{cases} \quad X' = A X$$

Cada solución $X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$ se puede interpretar como una curva en el plano.

La constante nula $X(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es una solución y es un punto de equilibrio del sistema.

Las curvas solución dependen de t y se llaman las "trayectorias" del sistema.

Eliminando este parámetro obtenemos curvas en x_1, x_2 llamadas "órbitas" del sistema.

Trataremos de visualizar las trayectorias y las órbitas para cada sistema, de manera de obtener un "retrato" de cada uno.

La trayectoria constante nula se sobreentiende y no se la menciona en la discusión.

I. Caso no degenerado

Es cuando $\det(A) \neq 0$ y entonces la matriz A tiene raíces características λ_1, λ_2 no nulas.

A) λ_1, λ_2 son reales distintas.

La matriz se diagonaliza y se puede elegir una base directa de autovectores $u_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$;

sea $M = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}, \det(M) > 0$. Las trayectorias son

$$X(t) = c_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{y} \quad X(0) = c_1 u_1 + c_2 u_2$$

En la base u_1, u_2 las coordenadas de la trayectoria son $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ c_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$.

Para eliminar el parámetro t tomamos valor absoluto

$$\begin{aligned} |y_1| &= |c_1| e^{\lambda_1 t}, \quad |y_2| = |c_2| e^{\lambda_2 t} \quad \Rightarrow \\ |y_1|^{\lambda_2} &= |c_1|^{\lambda_2} e^{\lambda_1 \lambda_2 t}, \quad |y_2|^{\lambda_1} = |c_2|^{\lambda_1} e^{\lambda_1 \lambda_2 t} \end{aligned}$$

Dividiendo estas dos últimas expresiones, eliminamos t y obtenemos las ecuaciones de las órbitas.

Si $c_2 = 0, y_2 = 0$; la órbita es el eje y_1 y hay dos trayectorias sobre ella.

Si $c_2 \neq 0, |y_1|^{\lambda_2} = \frac{|c_1|^{\lambda_2}}{|c_2|^{\lambda_1}} |y_2|^{\lambda_1} = k |y_2|^{\lambda_1}$ donde $k \geq 0$ y depende de la posición inicial;

para $k = 0$, la órbita es el eje y_2 y hay dos trayectorias sobre él;

para $k > 0$, la órbita es simétrica respecto de ambos ejes y porta cuatro trayectorias.

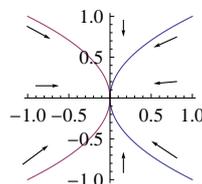
Las figuras de más abajo aclaran lo dicho.

A1) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ el sistema es estable y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$.

En este caso $Y(t)$ se mueve a lo largo de la curva $|y_1| = k' |y_2|^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$ que es tangente en el origen al eje y_2 y se parece a una parábola. Si $\lambda_1 = 2\lambda_2$ es una parábola acostada.

Por ser estable, las trayectorias se acercan al origen para $t \rightarrow +\infty$, tangencialmente al eje y_2 .

Ilustramos, para $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$, algunas órbitas.



Para hallar las trayectorias en las coordenadas originales (x_1, x_2) hacemos la transformación lineal del plano $X(t) = M Y(t)$; como la base de autovectores es directa, esta transformación lineal consiste en una composición de un trasquilado, una homotecia no homogénea y una rotación.

Las trayectorias se acercan al $(0, 0)$ en forma tangente al autovector u_2 asociado a λ_2 .

Esta configuración se llama **nodo estable**.

Ejemplo $X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.1 & -0.4 \end{pmatrix} X$

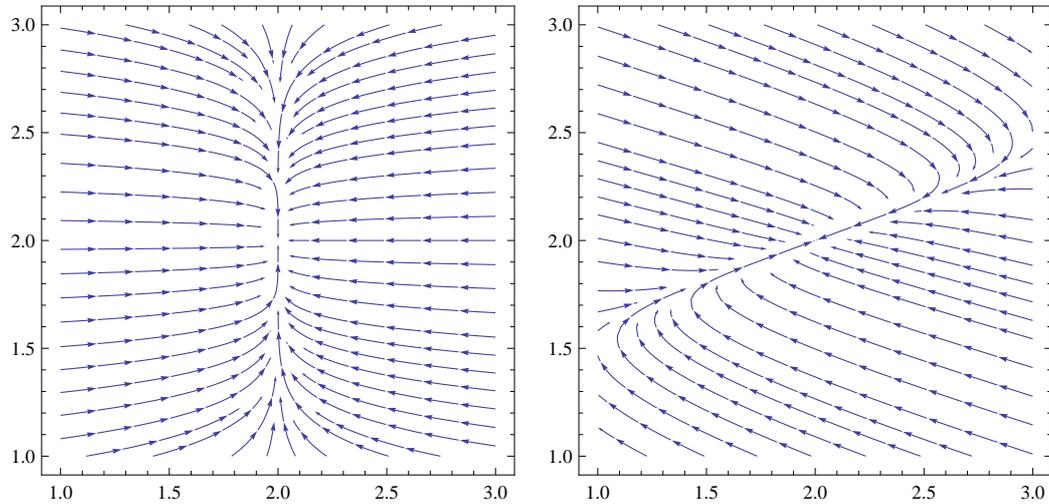
```
Eigensystem [ { { -0.5, 1 }, { 0.1, -0.4 } } ] // N
( { -0.770156, -0.129844 }
  { -0.965391, 0.260806 } { -0.937814, -0.347138 } )
```

Es estable con autovalores reales $\lambda_1 \approx -0.77, \lambda_2 \approx -0.12$.

Elegimos los autovectores $u_1 \approx (0.96, -0.26)$ y $u_2 \approx (0.93, 0.34)$ que forman una base directa.

Graficamos las trayectorias en coordenadas (y_1, y_2) y en coordenadas (x_1, x_2) .

```
data1 = Table[{-0.77 x, -0.12 y}, {x, -0.5, 0.5, .5}, {y, -0.5, 0.5, .5}];
data2 = Table[{-0.5 x + y, 0.1 x - 0.4 y}, {x, -0.5, 0.5, .5}, {y, -0.5, 0.5, .5}];
g1 = ListStreamPlot[data1]; g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}
```



A₂) $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ El sistema es inestable.

Las órbitas son las mismas que en el caso anterior y $X(t)$ se mueve alejándose del origen. Esta configuración se llama **nodo inestable**.

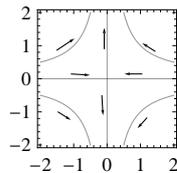
A₃) $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$

Las coordenadas verifican $|y_1|^{1/\lambda_2} = k |y_2|^{1/\lambda_1}$ y entonces $|y_1|^{1/\lambda_2} |y_2|^{-1/\lambda_1} = k$.

Si $k = 0$, las órbitas son los ejes y_1 e y_2 y hay dos trayectorias sobre cada uno.

Si $k > 0$, las órbitas se parecen a dos hipérbolas conjugadas, y hay dos trayectorias sobre cada una.

Para $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$, graficamos varias trayectorias.



La órbita en que se mueve una solución $X(t)$ es, genéricamente, similar a una hipérbola y son hipérbolas si $\lambda_2 = -\lambda_1 = 1$. Tienen asíntotas que son los ejes asociados a u_1 y u_2 . Esta configuración se llama una **ensilladura**. Además $X_1(t) = c_1 u_1 e^{\lambda_1 t}$ y $X_2(t) = c_2 u_2 e^{\lambda_2 t}$ son trayectorias sobre los autovectores: las primeras se acercan al origen y las segundas se alejan.

Ejemplo $X' = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} X$.

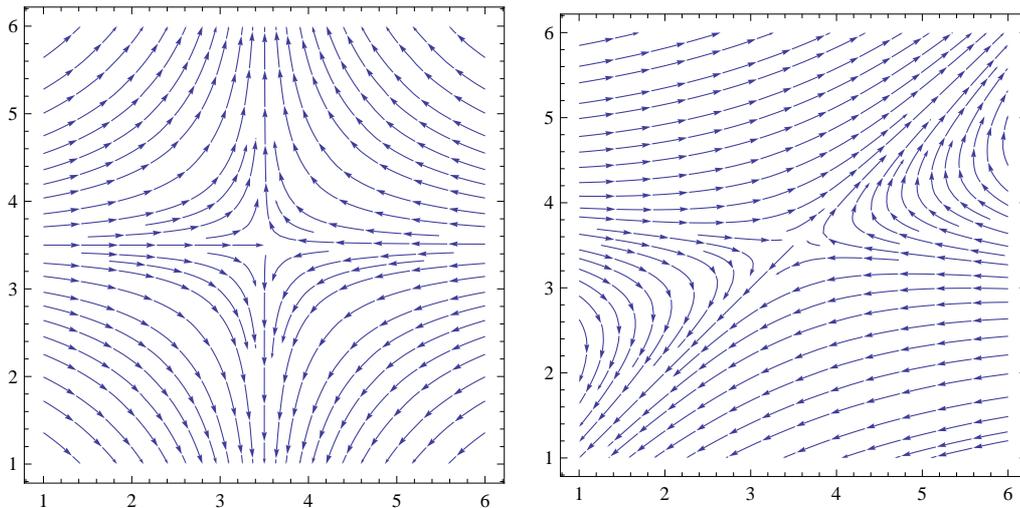
```
Eigensystem[{{-0.5, 1}, {0.1, 0.4}}] // N
{{-0.6, 0.5}, {-0.995037, 0.0995037}, {-0.707107, -0.707107}}
```

Es inestable con autovalores. $\lambda_1 = -0.6$ y $\lambda_2 = 0.5$

Elegimos los autovectores $u_1 \approx (0.99, -0.09)$ y $u_2 \approx (0.7, 0.7)$ que forman una base directa.

Graficamos las trayectorias en coordenadas (y_1, y_2) y en coordenadas (x_1, x_2) .

```
data1 = Table[{-0.6 x, 0.5 y}, {x, -0.5, 0.5, .2}, {y, -0.5, 0.5, .2}];
data2 = Table[{-0.5 x + y, 0.1 x + 0.4 y}, {x, -0.5, 0.5, .2}, {y, -0.5, 0.5, .2}];
g1 = ListStreamPlot[data1]; g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}
```



B) Los autovalores son iguales $\lambda_1 = \lambda_2$ y hay una base de autovectores.

Las órbitas son rectas por el origen.

$B_1)$ $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$.

Cada trayectoria no nula se mueve en una semirecta hacia el origen.

$B_2)$ $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$

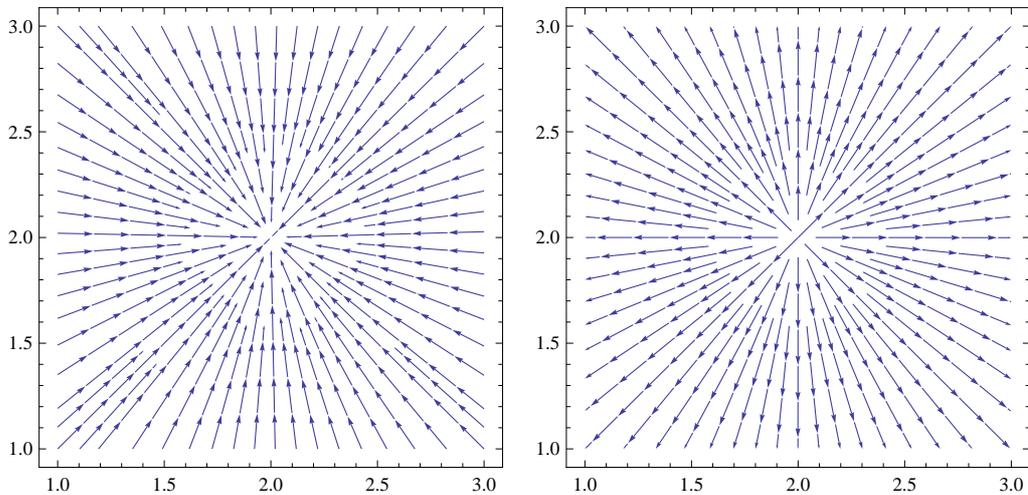
Cada trayectoria no nula se mueve en una semirecta alejándose del origen.

Demostrar que este caso se presenta si y sólo si la matriz del sistema es $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} = \lambda_1 I$

```

data1 = Table[{-x, -y}, {x, -0.5, 0.5, .5}, {y, -0.5, 0.5, .5}];
data2 = Table[{x, y}, {x, -0.5, 0.5, .5}, {y, -0.5, 0.5, .5}];
g1 = ListStreamPlot[data1]; g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```



C) Los autovalores son iguales y la matriz no se diagonaliza.

Sea u_1, u_2 una base de Jordan: $A u_1 = \alpha u_1$, $A u_2 = u_1 + \alpha u_2$.

Veamos que una base de Jordan es directa si y sólo si todas las bases de Jordan son directas.

En efecto, sean u_1, u_2 y u'_1, u'_2 dos bases de Jordan.

Necesariamente $u'_1 = \lambda u_1$ con $\lambda \neq 0$; $A(\lambda u_2) = \lambda A(u_2) = \lambda(u_1 + \alpha u_2) = u'_1 + \alpha(\lambda u_2)$ y $A u'_2 = u'_1 + \alpha u'_2$. Restando queda $A(u'_2 - \lambda u_2) = \alpha(u'_2 - \lambda u_2)$. Luego $u'_2 - \lambda u_2 = \beta u_1$, por lo tanto $\det(u'_1, u'_2) = \det(\lambda u_1, \lambda u_2 + \beta u_1) = \det(\lambda u_1, \lambda u_2) = \lambda^2 \det(u_1, u_2)$.

Por lo tanto u_1, u_2 es directa si y sólo si u'_1, u'_2 es directa.

Luego, no siempre será posible elegir una base directa. Esto es intrínseco del sistema.

Las trayectorias son

$$X(t) = c_1 u_1 e^{\alpha t} + c_2 (t u_1 + u_2) e^{\alpha t}$$

Las coordenadas de este punto móvil en la base u_1, u_2 son $(y_1, y_2) = ((c_1 + t c_2) e^{\alpha t}, c_2 e^{\alpha t})$.

De ahí $\frac{y_1}{y_2} = t + \frac{c_1}{c_2}$ y entonces $y_2 = c_2 e^{\alpha \left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{c_1}{c_2} \right)}$ y $|y_2| = |c_2| e^{\alpha \left(\frac{y_1}{y_2} - \frac{c_1}{c_2} \right)}$.

Tomando logaritmo y despejando, obtenemos la ecuación general de las órbitas.

Si $c_2 = 0$, la órbita es $y_2 = 0$, con dos trayectorias sobre ella;

Si $c_2 \neq 0$: la órbita es $y_1 = \frac{1}{\alpha} y_2 \log |y_2| + \left(-\frac{\log |c_2|}{\alpha} + \frac{c_1}{c_2} \right) y_2$, con dos trayectorias sobre ella;

esta función es impar; como tiene derivada ∞ en $y_2 = 0$, su gráfica es tangente, en el origen, al eje y_1 ; la convexidad depende del signo de α .

Las gráficas de las órbitas en las coordenadas (y_1, y_2) son:

como la letra \mathcal{S} , si α es positivo, o sea, cuando el sistema es inestable;

como la simétrica de la letra \mathcal{S} , si α es negativo, que corresponde a un sistema estable.

```
g1 = ParametricPlot[{t Log[Abs[t]], t}, {t, -1, 1}, Axes -> False];
g2 = ParametricPlot[{-t Log[Abs[t]], t}, {t, -1, 1}, Axes -> False];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}
```



Para las gráficas de las órbitas en las coordenadas (x_1, x_2) :

si las bases de Jordan son directas, las órbitas son similares a las obtenidas en coordenadas (y_1, y_2) ;

si las bases son indirectas, las órbitas son las simétricas de las obtenidas en coordenadas (y_1, y_2) .

Resumiendo, en total se tiene cuatro casos:

caso 1: el sistema es estable y las bases de Jordan son directas; las órbitas son como la simétrica de \mathcal{S} .

caso 2: el sistema es estable y las bases de Jordan son indirectas; las órbitas son como \mathcal{S} .

caso 3: el sistema es inestable y las bases de Jordan son directas; las órbitas son como \mathcal{S} .

caso 4: el sistema es inestable y las bases de Jordan son indirectas; las órbitas son como la simétrica de \mathcal{S} .

Ejemplo

El sistema $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ es estable con autovalor -1 doble y único autovector $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Una base de Jordan es $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ que es directa y las trayectorias son

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] e^{-t} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2(1+t) \end{pmatrix} e^{-t}$$

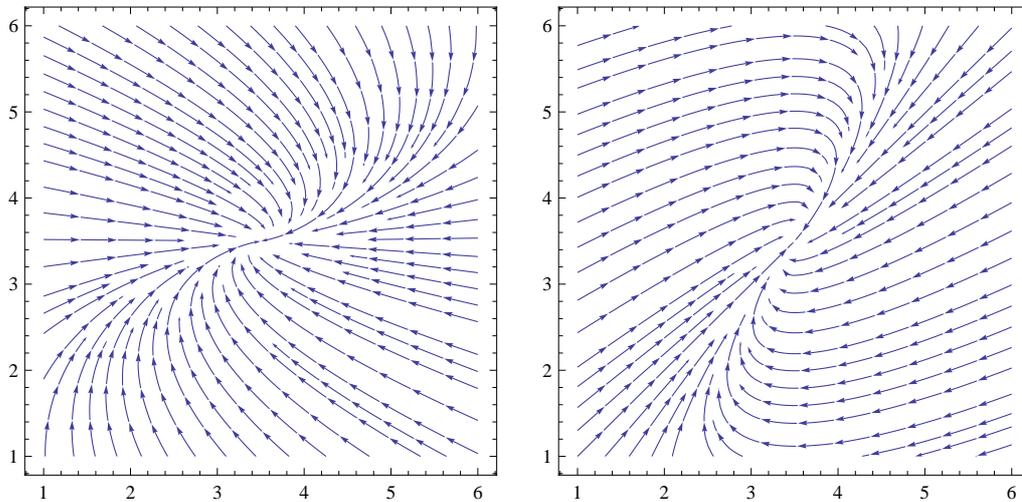
Las coordenadas de este punto móvil en la base de Jordan son $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + t c_2 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{-t}$

Estamos en el caso 1. Obtenemos los retratos en los dos sistemas de coordenadas.

```

data1 = Table[{- x + y, -y}, {x, -0.5, 0.5, .2}, {y, -0.5, 0.5, .2}];
g1 = ListStreamPlot [data1];
data2 = Table[{- 2 x + y, -x}, {x, -0.5, 0.5, .2}, {y, -0.5, 0.5, .2}];
g2 = ListStreamPlot [data2]; GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```



Ejercicio

a) Estudiar el sistema $X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} X$ y realizar los retratos correspondientes. (Caso 2).

b) Idem con $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} X$ (Caso 3).

c) Idem con $X' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$ (Caso 4).

D) λ_1, λ_2 complejos conjugados

Sean las raíces característica $\alpha \pm i\beta$ con $\beta > 0$. Para $\alpha < 0$ es estable y para $\alpha \geq 0$ es inestable.

Sea $h_1 + ih_2$ un autovector complejo asociado a $\alpha - i\beta$: $A(h_1 + ih_2) = (\alpha - i\beta)(h_1 + ih_2)$

Luego, en la base real $\{h_1, h_2\}$ se tiene $Ah_1 = \alpha h_1 + \beta h_2$ y $Ah_2 = -\beta h_1 + \alpha h_2$

Si $M = \{h_1, h_2\}$ es la matriz de cambio de base, entonces $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Si elegimos otro autovector $\tilde{h}_1 + i\tilde{h}_2$ correspondiente a $\alpha - i\beta$ entonces $\tilde{h}_1 + i\tilde{h}_2 = (a + ib)(h_1 + ih_2)$.

La matriz de cambio de base de $\{h_1, h_2\}$ a $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}$ es $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, que tiene determinante positivo.

En consecuencia, la base $\{h_1, h_2\}$ es directa si y sólo si $\{\tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}$ es directa.

El sistema $X' = A X$ en las nuevas coordenadas $X = M Y$ es $Y' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} Y$.

Para hallar las soluciones de este sistema usaremos coordenadas polares:

$$\begin{cases} y_1 = r(t) \cos \theta(t) \\ y_2 = r(t) \sin \theta(t) \end{cases} \text{ derivando y usando la ecuación } \begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2 \\ y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 \end{cases} \text{ queda}$$

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = \alpha r \cos \theta - \beta r \sin \theta \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = \beta r \cos \theta + \alpha r \sin \theta \end{cases}$$

Multiplicando la primera por $\cos \theta$, la segunda por $\sin \theta$, sumando y simplificando queda $r' = \alpha r$.

Por lo tanto $r = k e^{\alpha t}$. Colocando esta función en la primera ecuación y simplificando obtenemos $\theta' = \beta$ y por lo tanto $\theta = \beta t - \delta$.

Las trayectorias son

$$Y(t) = k e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(\beta t - \delta) \\ \sin(\beta t - \delta) \end{pmatrix}, \quad Y(0) = k \begin{pmatrix} \cos \delta \\ -\sin \delta \end{pmatrix}$$

que dependen de dos constantes, que se pueden determinar con las condiciones iniciales.

La curva $\begin{pmatrix} \cos(\beta t - \delta) \\ \sin(\beta t - \delta) \end{pmatrix}$ recorre la circunferencia de radio 1 con velocidad angular constante $\beta > 0$.

Si $\alpha \neq 0, k > 0$, el factor $k e^{\alpha t}$ modifica la distancia al origen e $Y(t)$ recorre una espiral en sentido antihorario.

Si $\alpha < 0$ el punto se mueve hacia el origen: **espiral estable**

Si $\alpha > 0$ el punto se mueve hacia infinito: **espiral inestable**.

Si $\alpha = 0$ las trayectorias se mueven sobre circunferencias con centro en el origen.

Volvemos a las coordenadas canónicas mediante $X(t) = M Y(t)$.

Si la base $\{h_1, h_2\}$ es directa, lo cual, según se vio, no depende del autovector $h_1 + i h_2$ elegido,

el movimiento en la espiral, en las coordenadas canónicas $\{x_1, x_2\}$, es en sentido antihorario. Si la base es indirecta, las espirales sufren una imagen especular y se recorren en sentido horario. Este sentido de recorrido de las espirales en coordenadas $\{x_1, x_2\}$ es intrínseco del sistema. Damos ejemplos de ambos casos.

Ejemplo Analizamos los dos sistemas $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$ y $X' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} X$

$$\left\{ \text{Eigensystem} \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right], \text{Eigensystem} \left[\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \right\}$$

$$\left\{ \{1+i, 1-i\}, \{i, 1\}, \{-i, 1\} \right\}, \left\{ \left\{ -\frac{1}{2}+i, -\frac{1}{2}-i \right\}, \{-i, 1\}, \{i, 1\} \right\} \right\}$$

El primero es inestable; para $\lambda = 1 - i$ un autovector es $h = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que da la base directa $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

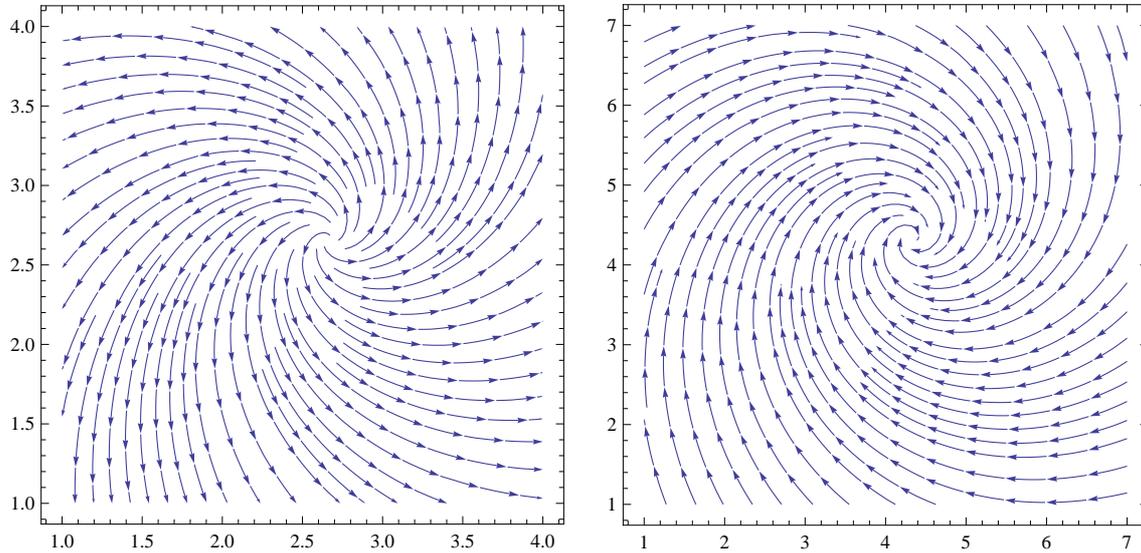
Luego, las espirales inestables, en la base canónica (x_1, x_2) , se recorren en sentido antihorario.

El segundo es estable; para $\lambda = -\frac{1}{2} - i$ un autovector es $h = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que da una base indirecta $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Luego, las espirales estables en la base canónica (x_1, x_2) se recorren en sentido horario.

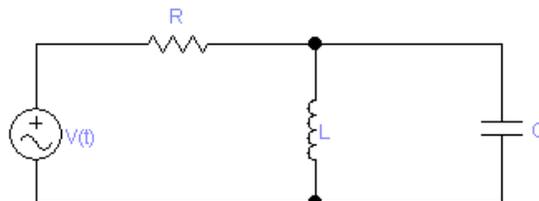
```

data1 = Table[{ x - y, x + y}, {x, -0.5, 0.5, .3}, {y, -0.5, 0.5, .3}];
data2 = Table[{ -1/2 x + y, -x - 1/2 y}, {x, -1, 1, .3}, {y, -1, 1, .3}];
g1 = ListStreamPlot[data1]; g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
    
```



Ejemplo

Consideremos el circuito de la figura.



Sean i_L la corriente en la bobina, v_C la diferencia de potencial en el capacitor y $V(t)$ el potencial de entrada. Las ecuaciones son:

$$\begin{pmatrix} v_C' \\ i_L' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{RC} \\ 0 \end{pmatrix} V(t) \quad \text{y} \quad c(\lambda) = \lambda^2 + \frac{1}{RC} \lambda + \frac{1}{LC}$$

Es siempre estable. Consideramos varias constantes físicas con $V(t) = 0$.

a) $R = 1 \Omega$, $L = 1 H$, $C = 1 F$

```
Eigensystem[{{-1, -1}, {1, 0}}]
```

```
{{1/2 (-1 + i sqrt(3)), 1/2 (-1 - i sqrt(3))}, {{1/2 (-1 + i sqrt(3)), 1}, {1/2 (-1 - i sqrt(3)), 1}}}
```

La raíz $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ tiene el autovector $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3}) \\ 1 \end{pmatrix}$ que da la base directa $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Las trayectorias

$$\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} = \left[c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} t \end{pmatrix} \right] e^{-\frac{t}{2}}$$

son espirales estables recorridas en sentido antihorario.

b) $R = \frac{1}{2} \Omega$, $L = 1 H$, $C = 1 F$

$$\{\mathbf{b}, \mathbf{j}\} = \text{JordanDecomposition} \left[\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

`Inverse[b].a.b // MatrixForm`

`{{{-1, 1}, {1, 0}}, {{-1, 1}, {0, -1}}}`

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Una base de Jordan es $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ que es indirecta. Las trayectorias son $\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} = \left[c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \right] e^{-t}$.

Es un sistema estable con base de Jordan indirecta y por lo tanto las órbitas son como la letra \mathcal{S} .

c) $R = \frac{1}{3} \Omega$, $L = \frac{1}{2} H$, $C = 1 F$

$$\mathbf{Eigensystem}\left[\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$\{\{-2, -1\}, \{-1, 1\}, \{-1, 2\}\}$$

Es un nodo estable.

Las trayectorias son $\begin{pmatrix} v_C \\ i_L \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-t}$ y las órbitas son cuasiparábolas.

II. Caso degenerado

Consideremos el caso degenerado: $\det(A) = 0$. Por lo tanto un autovalor es cero. No es estable.

a) Si A tiene un autovalor no nulo λ_1 entonces la matriz se puede diagonalizar.

Sea u_1, u_2 una base de autovectores: $A(u_1) = \lambda_1 u_1$ y $A(u_2) = 0$.

La solución general del sistema es:

$$X(t) = c_1 u_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 u_2$$

El punto se mueve sobre una recta paralela a u_1 acercándose al punto $c_2 u_2$ si $\lambda_1 < 0$ y alejándose a ∞ si $\lambda_1 > 0$.

Ejemplo

Consideremos el sistema $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} X$

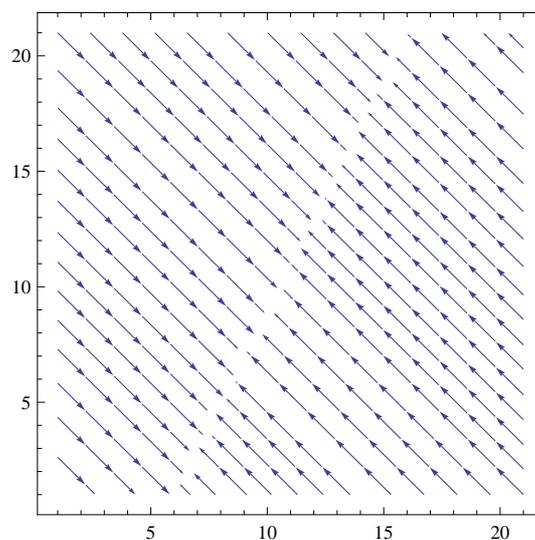
Las trayectorias se acercan en forma lineal a puntos sobre la recta generada por \vec{v}_2 .

$$\mathbf{Eigensystem}\left[\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\{\{-3, 0\}, \{-1, 1\}, \{1, 2\}\}$$

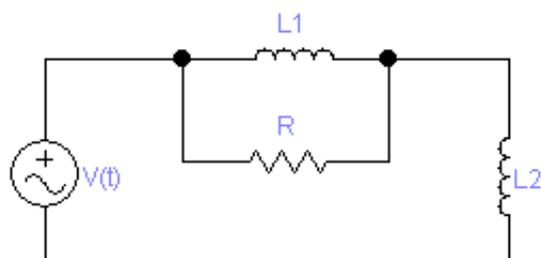
Las trayectorias son $X(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ se acercan a $c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sobre la paralela a $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

```
data = Table[{-2 x + y, 2 x - y}, {x, -1, 1, .1}, {y, -1, 1, .1}];
ListStreamPlot[data]
```



Ejemplo

Consideremos el siguiente circuito



Las ecuaciones son

$$\begin{pmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L_1} & \frac{R}{L_1} \\ \frac{R}{L_2} & -\frac{R}{L_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_2} \end{pmatrix} v(t) \quad \text{y} \quad c(\lambda) = \lambda \left(\lambda + R \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) \right)$$

El sistema es degenerado e inestable pues $\lambda = 0$ es raíz. El autosistema es

$$\lambda_1 = -R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right), u_1 = \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 + 2L_2 \end{pmatrix} \quad y \quad \lambda_2 = 0, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Las trayectorias son $X_0(t) = c_1 \begin{pmatrix} L_2 \\ L_1 + 2L_2 \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} X_0(t) = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) Si ambos autovalores son nulos, pero la matriz no es nula, la matriz de Jordan es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Una base de Jordan verifica $u_1, u_2 : A u_1 = 0, A u_2 = u_1$; las trayectorias son

$$X_0(t) = c_1 u_1 + c_2(t u_1 + u_2)$$

Las órbitas son rectas paralelas al único autovector u_1 .

Ejemplo $X' = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} X$

El polinomio característico es λ^2 y una base de Jordan es $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; las trayectorias son

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \left(t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Tipos estructuralmente estables e inestables

Consideremos un sistema lineal de orden 2 $X' = A X$ no degenerado, es decir $\det(A) \neq 0$. Es claro que bajo pequeñas perturbaciones de A , se preserva el tipo en los casos siguientes:

- Autovalores reales distintos ambos negativos: nodo estable
- Autovalores reales de distinto signo: punto de silla
- Autovalores reales distintos y ambos positivos: nodo inestable
- Autovalores complejos de parte real negativa: espiral estable
- Autovalores complejos de parte real positiva: espiral inestable

Decimos que son estructuralmente estables.

Bajo pequeñas perturbaciones de A puede cambiar el tipo en los casos siguientes:

- a) Los autovalores son reales iguales
- b) Los autovalores son imaginarios puros.
- c) Un autovalor es nulo.

Son estructuralmente inestable. Ejemplificamos estos últimos.

Sea ϵ un número positivo pequeño; perturbaciones pequeñas pueden ocurrir dando:

- a) de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nodos estables $\begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ \epsilon & -1 \end{pmatrix}$ ó $\begin{pmatrix} -1 + \epsilon & 0 \\ 0 & -1 - \epsilon \end{pmatrix}$;
- b) de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ una S $\begin{pmatrix} -1 & \epsilon \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
- c) de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ espirales estables o inestables $\begin{pmatrix} \pm\epsilon & -1 \\ 1 & \pm\epsilon \end{pmatrix}$;
- d) de $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nodo estable $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\epsilon \end{pmatrix}$ o una ensilladura $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \epsilon \end{pmatrix}$.

Sistemas no lineales

Dado un sistema no lineal $\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$ buscamos los puntos de equilibrio, que son los puntos en los cuales la función constante es solución: $f_1(x_1, x_2) = 0, f_2(x_1, x_2) = 0$.

"Linealizamos" el sistema tomando el Jacobiano de f_1, f_2 en un punto de equilibrio.

Estas linealizaciones, en general, reflejan el comportamiento del sistema localmente.

Veamos dos ejemplo clásicos ilustrativos, sin entrar en detalles.

1. El sistema $\begin{cases} x_1' = -x_2 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_1 \\ x_2' = x_1 + (a - x_1^2 - x_2^2)x_2 \end{cases}$ es no lineal.

El único punto de equilibrio es el origen y el sistema lineal asociado es $\begin{cases} x_1' = a x_1 - x_2 \\ x_2' = x_1 + a x_2 \end{cases}$

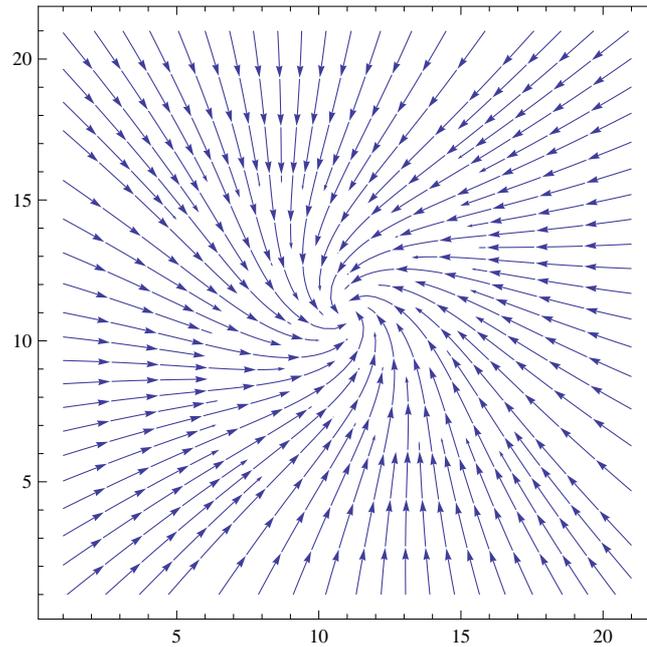
Las raíces características son $a \pm i$

Si $a < 0$ es estable con espirales convergentes. Veamos el gráfico del sistema no lineal, cerca del origen.

```

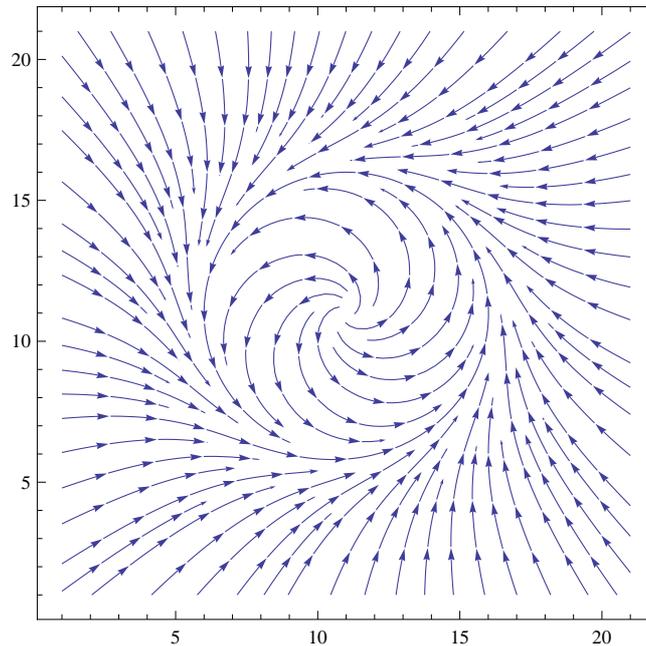
a = -1; data = Table[{-y + (a - x2 - y2) x, x + (a - x2 - y2) y}, {x, -2, 2, .2}, {y, -2, 2, .2}];
ListStreamPlot[data]

```



Si $a > 0$ son espirales divergentes. Veamos el gráfico del sistema no lineal, cerca del origen.

```
a = 1; data = Table[{-y + (a - x^2 - y^2) x, x + (a - x^2 - y^2) y}, {x, -2, 2, .2}, {y, -2, 2, .2}];
ListStreamPlot[data]
```



En este caso, aparece una solución $x_1(t) = a \cos t$, $x_2(t) = a \sin t$ que es un ciclo, que es "estable", pues todas las trayectorias se acercan a él, según probaremos. En efecto, utilizando coordenadas polares $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ el sistema es

$$\begin{cases} r' \cos \theta - r \sin \theta \theta' = -r \sin \theta + (a - r^2) r \cos \theta \\ r' \sin \theta + r \cos \theta \theta' = r \cos \theta + (a - r^2) r \sin \theta \end{cases}$$

Multiplicando la primera por $\cos \theta$ y la segunda por $\sin \theta$ y restando queda $r' = (a - r^2) r$ cuya solución es

$$r(t)^2 = \frac{a r_0^2}{r_0^2 + (a - r_0^2) e^{-2at}} \quad \text{con } r_0 = r(0) \neq 0$$

lo cual prueba que $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = a$ y toda trayectoria se acerca al "ciclo límite", que es la circunferencia de radio $a > 0$.

2. El sistema de Van der Pol $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + \mu(1 - x_1^2)x_2 \end{cases}$ es no lineal.

El origen es el único punto de equilibrio y la constante $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = 0$ es solución. Con el Jacobiano en el origen, obtenemos el sistema lineal

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + \mu x_2 \end{cases}$$

Se obtienen distintas configuraciones variando el valor de μ .

Para $0 < \mu < 2$, el sistema tiene raíces complejas, con parte real positiva, y por ello es inestable.

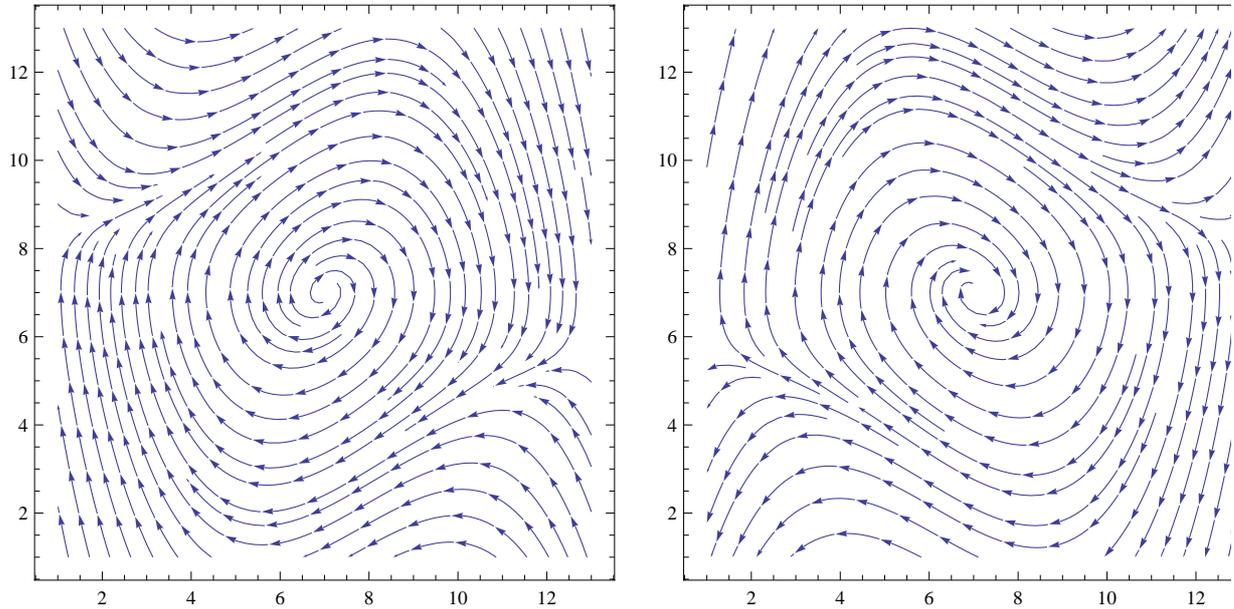
Para $-2 < \mu < 0$, tiene raíces complejas con parte real negativa y por ello es estable.

Graficamos para $\mu = \pm 0.5$ y se aprecian las espirales divergentes o convergentes respectivas, cerca del origen.

```

data1 = Table[{y, -x + 0.5 (1 - x^2) y}, {x, -3, 3, .5}, {y, -3, 3, .5}];
g1 = ListStreamPlot[data1];
data2 = Table[{y, -x - 0.5 (1 - x^2) y}, {x, -3, 3, .5}, {y, -3, 3, .5}];
g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```



Para $2 < \mu$ tiene raíces reales positivas y es un nodo inestable.

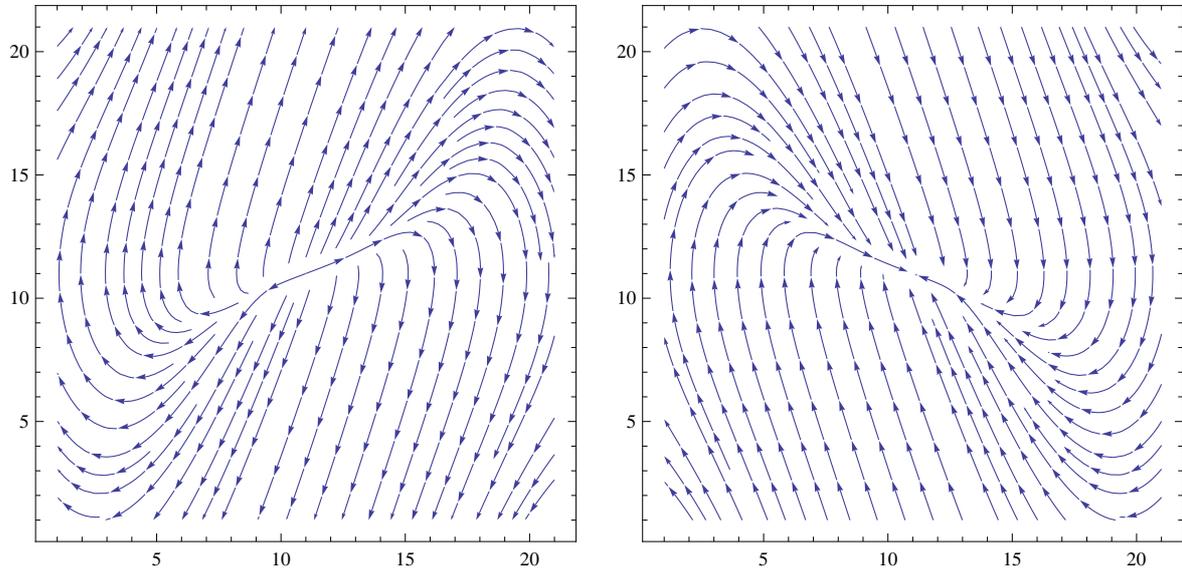
Para $\mu < -2$ tiene raíces reales negativas y es un nodo estable.

Para $\mu = \pm 3$ graficamos el nodo inestable y estable respectivo.

```

data1 = Table[{y, -x + 3 (1 - x^2) y}, {x, -1, 1, .1}, {y, -1, 1, .1}];
g1 = ListStreamPlot[data1];
data2 = Table[{y, -x - 3 (1 - x^2) y}, {x, -1, 1, .1}, {y, -1, 1, .1}];
g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]

```

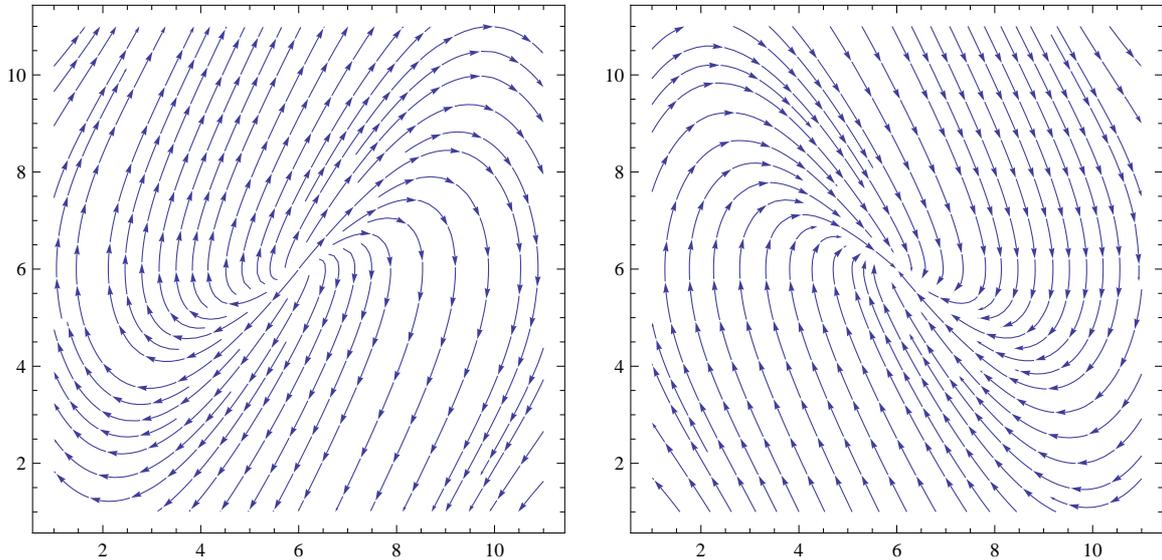


Para $\mu = 2$ tiene raíces coincidentes reales positivas y no es diagonalizable.

Para $\mu = -2$ tiene raíces coincidentes reales negativas y no es diagonalizable.

```

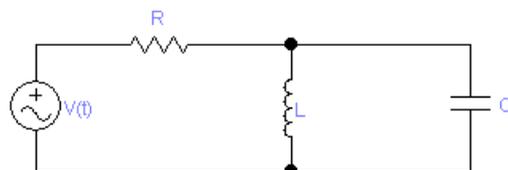
data1 = Table[{y, -x + 2 (1 - x^2) y}, {x, -1, 1, .2}, {y, -1, 1, .2}];
g1 = ListStreamPlot[data1];
data2 = Table[{y, -x - 2 (1 - x^2) y}, {x, -1, 1, .2}, {y, -1, 1, .2}];
g2 = ListStreamPlot[data2];
GraphicsGrid[{{g1, g2}}]
    
```



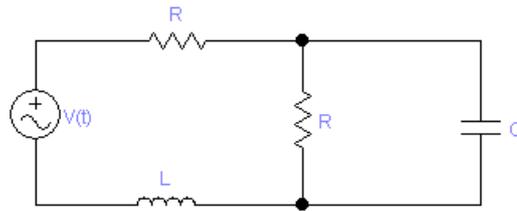
Ejercicios

1. a) Hallar la solución general de la ecuación $x''' + 4x'' + 5x' + 2x = 2 - t$
 - b) Resolver y graficar $2x''' + 7x'' + 7x' + 2x = te^{-t}$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -1$
 - c) Resolver y graficar $x''' + 2x'' - x' - 2x = 1$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, $x''(0) = 0$
 - d) Resolver y graficar $x''' + x'' + x' = e^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 0$, $x''(0) = 1$
 - e) Hallar la solución general de $x^{(4)} + 5x^{(3)} + 8x^{(2)} + 7x' + 3x = 0$
 - f) ¿Cuáles de las ecuaciones dadas son estables?
2. a) En el circuito que sigue demostrar que la diferencia de potencial en el capacitor v_C verifica la ecuación

$$v_C'' + \frac{1}{RC} v_C' + \frac{1}{LC} v_C = \frac{1}{RC} V'(t)$$



- b) Hallar la solución para $R = 1 \Omega$, $C = \frac{1}{2} F$, $L = 1 H$, $v(t) = te^{-t}$ y $v_C(0) = v_C'(0) = 0$.
3. En el circuito de la figura que sigue hay un voltaje de entrada $V(t)$..



Mostrar que la ecuación que verifica el potencial en el capacitor es

$$v_C'' + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)v_C' + \frac{2}{LC}v_C = \frac{1}{LC}V(t)$$

y que la ecuación que verifica la corriente en la bobina es

$$i_L'' + \left(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L}\right)i_L' + \frac{2}{LC}i_L = \frac{1}{RLC}V(t) + \frac{1}{L}V'(t)$$

4. ¿ Para qué valores de la constante k son estables las ecuaciones siguientes ?

a) $x''' + 2kx'' + 2x' + 3k^2x = f(t)$

b) $x''' + (k+2)x'' + 3x' + k^2x = f(t)$

c) $x''' + x'' + k^2x' + kx = f(t)$

d) $x^{(4)} + 11x^{(3)} + 6x^{(2)} + (k+6)x' + kx$ Rta: $(0 < k < 5)$

En cada caso, elegir una constante k para que sea estable y graficar una base de soluciones.

5. Resolver el sistema $\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ y encontrar la solución que en $t=0$ está en $(1, -2)$.

6. Sea $X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}X + B(t)$. Encontrar la solución general para cada $B(t)$ dado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1+t \\ -2-5t \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}e^{it}$$

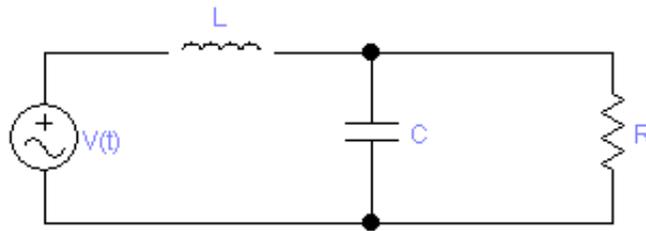
7. Hallar la solución general de $X' = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}X + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{\alpha t}$ para cada valor de α .

8. a) Resolver los sistemas homogéneos $X' = AX$ para las matrices A dadas a continuación:

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Graficar las órbitas y describir las trayectorias de cada sistema de la parte a).

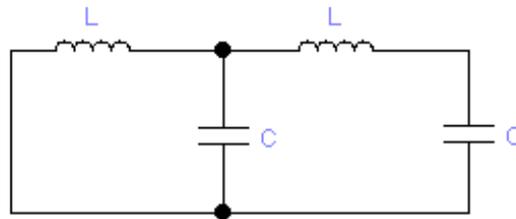
9. En el circuito siguiente considere como incógnitas la corriente en la bobina i_L y el potencial en el capacitor v_C . Hallar el sistema que satisfacen.



Resolverlo para los datos que siguen.

- a) $L = 1 H, C = \frac{1}{2} F, R = \frac{2}{3} \Omega, V(t) = e^{-2t} V$
- b) $L = 1 H, C = 1 F, R = 1 \Omega, V(t) = 1 V$
- c) $L = 1 H, C = 1 F, R = \frac{1}{2} \Omega, V(t) = e^{-t}$

10. a) En el circuito de la figura, sea i_1 la corriente en la primera bobina e i_2 la corriente en la segunda, ambas de izquierda a derecha, y $\alpha = \frac{1}{CL}$.



Probar que satisfacen el sistema de segundo orden

$$\begin{cases} i_1'' = -\alpha i_1 + \alpha i_2 \\ i_2'' = \alpha i_1 - 2\alpha i_2 \end{cases}$$

Escribirlo como un sistema 4×4 de primer orden y probar que es inestable.

Además para $CL = 1$ resolverlo si $i_1(0) = 0, i_1'(0) = 1, i_2(0) = 1, i_2'(0) = 0$.

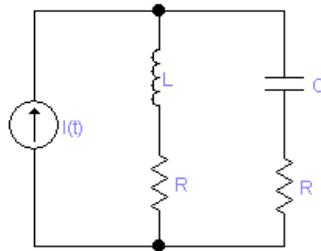
- b) Considere el sistema dibujado esquemáticamente de dos masas iguales $m_1 = m_2$ y dos resortes iguales $k_1 = k_2 = k$, que se mueven horizontalmente sin fricción.

Si $\alpha = k/m$ mostrar que las posiciones x_1 y x_2 de las masas respecto de su posición de equilibrio verifican el sistema

$$\begin{cases} x_1'' = -2\alpha x_1 + \alpha x_2 \\ x_2'' = \alpha x_1 - \alpha x_2 \end{cases}$$

Si hacemos el cambio $x_1 \rightarrow i_2$ y $x_2 \rightarrow i_1$ se ve que verifican el mismo sistema que el circuito anterior y por ello se considera un análogo mecánico del circuito.

11. Considere el circuito de la figura cuya entrada es la corriente $I(t)$. Sean i_L la corriente en la bobina y v_C la diferencia de potencial en el capacitor.



- a) Probar que, con orientaciones convenientes de las corrientes, se satisface el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2R}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix} I(t)$$

Probar que es internamente estable.

- b) Resolverlo para $R = 4\Omega$, $L = 4H$, $C = 1F$ e $I(t) = 1A$, si inicialmente está inactivo.

12. a) Encontrar la solución general de $X' = AX$ para las siguientes matrices A

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

y en cada caso determinar la solución que en $t = 0$ se encuentra en $(1, 0, 1)$.

Las dos primeros son triangulares superiores y se pueden resolver directamente o por autovectores.

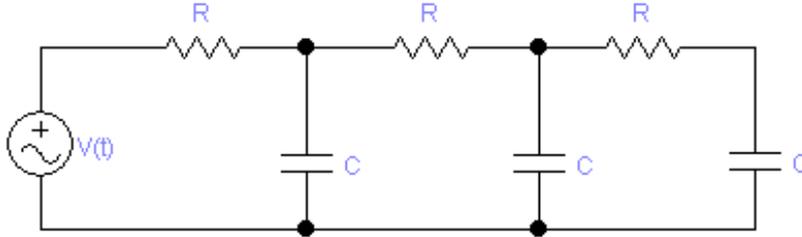
El tercero también se puede resolver directamente o por autovectores.

- b) Resolver los sistemas no homogéneos $X' = AX + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}$ para cada A dada en a).

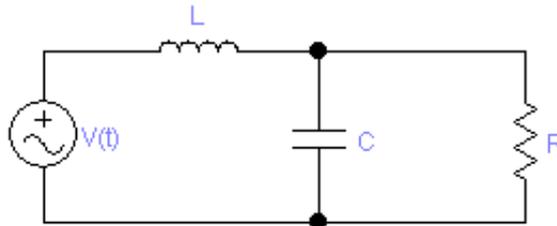
13. Averiguar para qué valores de la constante k el sistema $X' = AX$ es internamente estable si A es

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 & 0 \\ -1 & k & 0 \\ 1 & 1 & k \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ k & -3 & -k \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} k & -2 & 1 \\ 1 & -k & 0 \\ 2 & 0 & k \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} k & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ k & 0 & -k \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & k \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & k \end{pmatrix}$$

14. Sean i_1, i_2 e i_3 las corrientes en las resistencias, orientadas de izquierda a derecha.
 a) Encontrar las ecuaciones que satisfacen y demostrar que el circuito es internamente estable.
 b) Para $R = 1 \Omega$, $C = 0.5$ y $V(t) = 1 V$ encontrar la solución si hay reposo inicial.



15. En el circuito de la figura la entrada es el potencial $V(t)$ y la salida es la caída de potencial en la resistencia.



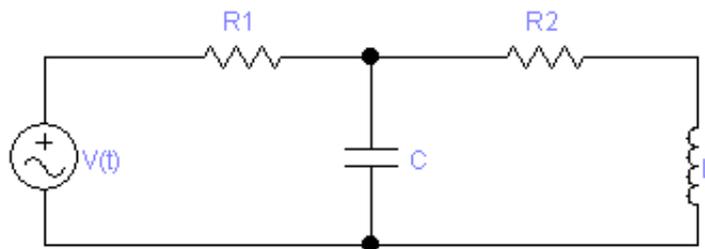
- a) La ecuación que satisface la salida $y = v_R = v_C$ es $v_C'' + \frac{1}{CR} v_C' + \frac{1}{LC} v = \frac{1}{LC} V(t)$
 b) Si suponemos que $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$ y $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ entonces la función de transferencia verifica

$$|H(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \quad \text{y} \quad \text{Arg} H(i\omega) = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}$$

Graficar $|H(i\omega)|$ para los valores de $\omega_0 = 0.5, 1, 2$

Concluir que se trata de un filtro de paso bajo para frecuencias entre $-\omega_0$ y ω_0 .

- 16) En el circuito de la figura sea i_L la corriente que circula en sentido horario por la bobina y v_C la diferencia de potencial en el capacitor.



a) Probar que el sistema que satisfacen es

$$\begin{pmatrix} i_L' \\ v_C' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R_2}{L} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{R_1 C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{R_1 C} \end{pmatrix} V(t)$$

y que es internamente estable.

b) Resolverlo para $R_1 = \frac{1}{4} \Omega$, $R_2 = \frac{1}{2} \Omega$, $L = \frac{1}{2} H$, $C = 1 F$ y $u(t) = e^{-t}$ si inicialmente no hay corrientes y está descargado el capacitor.

c) Considere como salida la caída de potencial en la segunda resistencia y determine su ecuación.

17. Molécula Triatómica lineal

Se tiene una molécula triatómica lineal formada por dos átomos de igual masa m y otro de masa mayor M situada entre ambas y unidas por fuerzas tipo "resortes" de constante k .

El movimiento se considera en la recta de las moléculas y los desplazamientos lineales x_i de cada masa se consideran respecto de su posición de equilibrio.

a) Mostrar que las posiciones relativas verifican $X'' = \begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} & 0 \\ \frac{k}{M} & -\frac{2k}{M} & \frac{k}{M} \\ 0 & \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} X$

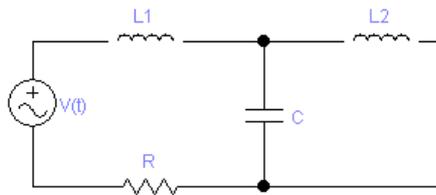
b) Comprobar que la solución general es

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \left\{ c_3 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + c_4 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \right\} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left\{ c_5 \cos \sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}} t + c_6 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{k(2m+M)}{mM}} t \right\} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2m}{M} \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Para $k = 12$, $m = 2$, $M = 6$ calcular el modo general de movimiento y luego particularizar para las

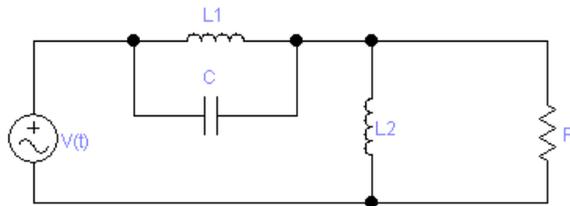
condiciones iniciales: $X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X'(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

18. Considere el circuito de la figura.



- Hallar el sistema que satisfacen las corrientes en las bobinas i_1 y i_2 y el potencial en el capacitor v_C .
- Probar que es estable internamente.
- Para $V(t) = 0$, $R = 6 \Omega$, $L_1 = 1 H$, $L_2 = 10 H$, $C = \frac{1}{10} F$ hallar la solución para reposo inicial.
- Para $V(t) = 0$, $R = \frac{4}{9} \Omega$, $L_1 = \frac{1}{9} H$, $L_2 = 1 H$, $C = 2 F$, hallar la solución para reposo inicial.

19. Considere el circuito de la figura.



- Hallar el sistema que satisfacen las corrientes i_1 y i_2 en las bobinas y el potencial en el capacitor v_C .
- Probar que es inestable internamente.
- Sea $R = 1 \Omega$, $L_1 = L_2 = 1 H$, $C = 1 F$.
Probar que para el potencial de entrada $V(t) = 1$ volt las corrientes en las bobinas son no acotadas.
- Probar que la salida v_C satisface la ecuación de segundo orden estable

$$v_C'' + \frac{1}{RC} v_C' + \frac{1}{C} \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right) v_C = \frac{1}{L_2 C} v(t) + \frac{1}{RC} v'(t)$$

Uso de PC

1. Resolver la ecuación diferencial $x^{(3)} + 2x^{(2)} + 2x^{(1)} + x = 2e^{-t}$ con reposo inicial.

Es estable y como la entrada decae a cero, la solución se desvanece.

Primer método. Buscamos la solución general.

$$\text{Solve} [r^3 + 2r^2 + 2r + 1 = 0, r] // N$$

$$\{\{r \rightarrow -1.\}, \{r \rightarrow -0.5 - 0.866025 i\}, \{r \rightarrow -0.5 + 0.866025 i\}\}$$

Luego la solución de la homogénea es $c_1 e^{-t} + (c_2 \cos 0.87t + c_3 \sin 0.87t) e^{-0.5t}$

Buscamos una particular de la no homogénea de la forma $(a + bt) e^{-t}$.

```

x[t_] := (a + b t) e-t
(x''''[t] + 2 x'''[t] + 2 x'[t] + x[t]) et // Simplify
b

```

Luego tomamos $a = 0$, $b = 2$ y queda $x_p(t) = 2t e^{-t}$ como solución particular.

La solución general es

$$c_1 e^{-t} + (c_2 \cos 0.87 t + c_3 \sin 0.87 t) e^{-0.5 t} + 2 t e^{-t}$$

Imponemos las condiciones de reposo inicial.

```

y[t_] := c1 e-t + (c2 Cos[0.87 t] + c3 Sin[0.87 t]) e-0.5 t + 2 t e-t
Solve[{y'''[0] == 0, y'[0] == 0, y[0] == 0}, {c1, c2, c3}]
{{c1 -> 1.98629, c2 -> -1.98629, c3 -> -1.1573}}

```

La solución es aproximadamente

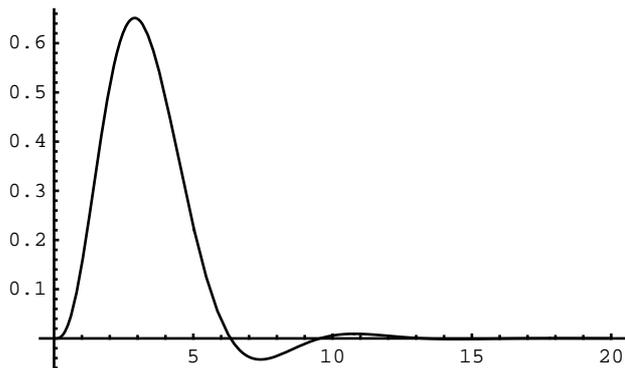
$$1.99 e^{-t} + (-1.99 \cos 0.87 t - 1.16 \sin 0.87 t) e^{-0.5 t} + 2 t e^{-t}$$

y su gráfica es:

```

g1 = Plot[1.99 e-t + (-1.99 Cos[0.87 t] - 1.16 Sin[0.87 t]) e-0.5 t + 2 t e-t, {t, 0, 20}];

```

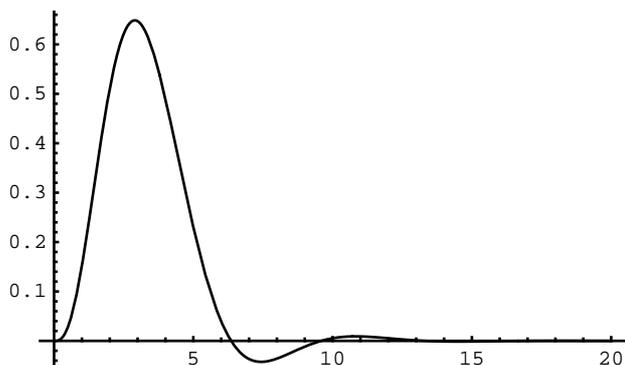


Segundo método. La resolvemos usando los métodos numéricos del programa y la graficamos. Luego superponemos ambas gráficas. Además damos una tabla de valores de la solución.

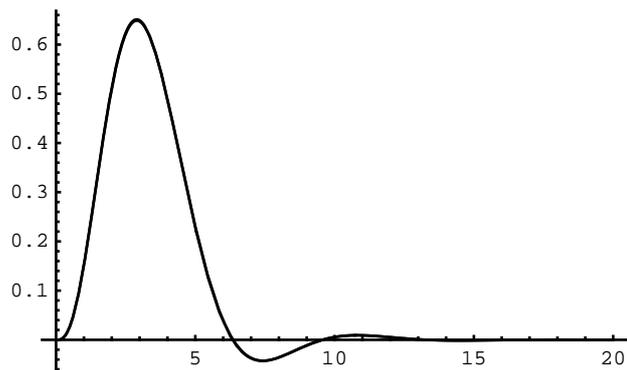
```

Clear[x, t];
sol = NDSolve[{x''''[t] + 2 x'''[t] + 2 x'[t] + x[t] == 2 e-t, x'''[0] == 0, x'[0] == 0,
x[0] == 0}, x, {t, 0, 20}];
g2 = Plot[Evaluate[x[t] /. sol], {t, 0, 20}];

```



```
Show[g1, g2];
```



Damos una tabla de valores de la solución aproximada en el intervalo 0 – 10

```
Table[{0.5 k, First[x[t] /. sol /. t -> 0.5 k]}, {k, 0, 20}] // TableForm
```

```
0    -6.65601 × 10-31
0.5    0.0284029
1.0    0.152117
1.5    0.336636
2.0    0.510863
2.5    0.621314
3.0    0.647006
3.5    0.595076
4.0    0.489402
4.5    0.359091
5.0    0.230036
5.5    0.120365
6.0    0.0392815
6.5    -0.0117554
7.0    -0.036692
7.5    -0.0422941
8.0    -0.0359484
8.5    -0.0241412
9.0    -0.0116633
9.5    -0.00142063
10.0   0.00533902
```

2. Resolver y graficar el sistema $\begin{cases} x' = -4x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ con $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

```
Eigensystem[{{-4, -1}, {2, -1}}]
```

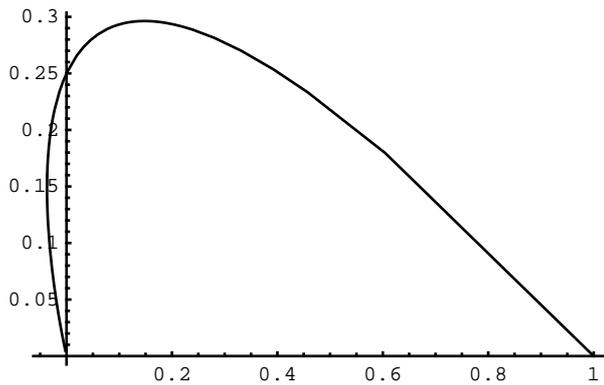
```
{{-3, -2}, {{-1, 1}, {-1, 2}}}
```

Las soluciones son $c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-2t}$ Imponemos las condiciones iniciales.

```
Solve[c1 {{-1}, {1}} + c2 {{-1}, {2}} == {{1}, {0}}, {c1, c2}]
```

```
{{c1 -> -2, c2 -> 1}}
```

`ParametricPlot [{2, -2} e-3t + {-1, 2} e-2t, {t, 0, 3}, PlotRange → All];`



3. Resolver y graficar el sistema $\begin{cases} x' = -x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$ con $x(0) = 1, y(0) = 1$.

`Eigensystem [(-1 -1 ; 2 -1)]`

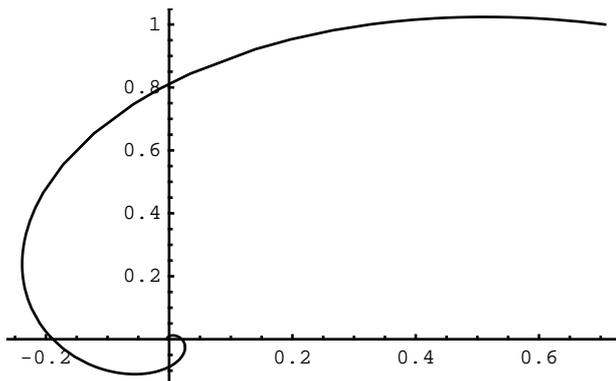
$\{ \{-1 - i\sqrt{2}, -1 + i\sqrt{2}\}, \{ \{-\frac{i}{\sqrt{2}}, 1\}, \{\frac{i}{\sqrt{2}}, 1\} \}$

Las soluciones son $e^{-t} \left[c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2} t \\ \cos \sqrt{2} t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \sqrt{2} t \\ -\sin \sqrt{2} t \end{pmatrix} \right]$ Imponemos las condiciones iniciales.

`Solve [c1 (0 ; 1) + c2 (-1 ; 0) == (1 ; 1), {c1, c2}]`

$\{ \{c_1 \rightarrow 1, c_2 \rightarrow -1\} \}$

`ParametricPlot [e-t { -\frac{1}{\sqrt{2}} Sin[\sqrt{2} t], Cos[\sqrt{2} t] } - e-t { -\frac{1}{\sqrt{2}} Cos[\sqrt{2} t], -Sin[\sqrt{2} t] }, {t, 0, 10}, PlotRange → All];`

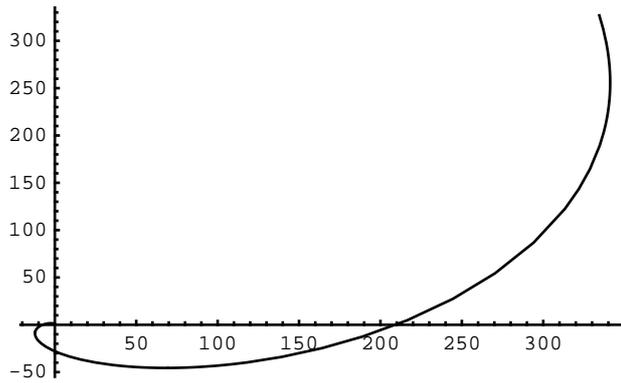


Otros ejemplos

`DSolve [{x' [t] == 3 x[t] - 4 y[t], y' [t] == 2 x[t] + 3 y[t], x[0] == 0, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, t]`

$\{ \{ x(t) \rightarrow -\frac{i(e^{(3-2i\sqrt{2})t} - e^{(3+2i\sqrt{2})t})}{\sqrt{2}}, y(t) \rightarrow \frac{1}{2}(e^{(3-2i\sqrt{2})t} + e^{(3+2i\sqrt{2})t}) \}$

```
ParametricPlot[{x[t], y[t]} /. %, {t, 0, 2}];
```

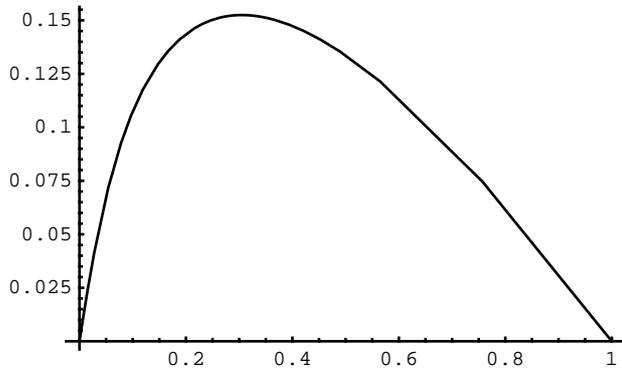


```
DSolve[{x'[t] == 3 x[t] + y[t], y'[t] == 2 x[t] - 5 y[t], x[0] == 0, y[0] == 1}, {x[t], y[t]}, t]
```

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow -\frac{e^{(-1-3\sqrt{2})t} - e^{(-1+3\sqrt{2})t}}{6\sqrt{2}}, y(t) \rightarrow \frac{1}{6} \left(3e^{(-1-3\sqrt{2})t} + 2\sqrt{2}e^{(-1-3\sqrt{2})t} + 3e^{(-1+3\sqrt{2})t} - 2\sqrt{2}e^{(-1+3\sqrt{2})t} \right) \right\} \right\}$$

3. Resolvemos numéricamente y graficamos el sistema $\begin{cases} x' = -3x + y \\ y' = x - 2y \end{cases}$ con $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

```
sol = NDSolve[
  {x'[t] == -3 x[t] + y[t], y'[t] == x[t] - 2 y[t], x[0] == 1, y[0] == 0}, {x, y}, {t, 0, 10}]
ParametricPlot[Evaluate[{x[t], y[t]} /. sol], {t, 0, 10}];
{{x -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>], y -> InterpolatingFunction[{{0., 10.}}, <>]}}
```



ESTABILIDAD. Esquema de Routh

Sea $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$ un polinomio real mónico.

Queremos determinar cuántas raíces tiene, reales o complejas, en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$.

Sea $R > 1$, $R > 2(|a_1| + \dots + |a_n|)$ entonces para $|z| \geq R$

$$|p(z)| = |z^n(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})| > |(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})| \geq 1 - |z^{-1}|(|a_1| + \dots + |a_n|) \geq 1 - \frac{1}{2} > 0$$

y por lo tanto todas las raíces están en el círculo abierto $|z| < R$.

Supongamos que no tiene raíces imaginarias puras.

Una manera geométrica de contar las raíces en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$ es hallar la curva imagen por $p(z)$ del borde del semicírculo de radio R que se compone de:

- la semicircunferencia $\{R e^{i\theta} : \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}\}$ orientada positivamente
- y del diámetro vertical $\{iy : -R \leq y \leq R\}$ orientado hacia arriba

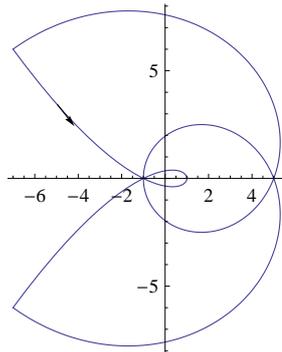
y contar las veces netas que circunvala al origen.

1. La curva imagen de la semicircunferencia por $p(z) = z^n(1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n})$ recorre, considerando R grande, casi lo mismo que z^n , un ángulo de $\frac{\pi n}{2}$ a $\frac{3\pi n}{2}$ es decir, de πn radianes lo cual son $\frac{n}{2}$ circunvalaciones positivas alrededor del origen.
2. La imagen del diámetro $\{iy, -R < y < R\}$, cierra la curva anterior dando, eventualmente, algunas vueltas más alrededor del origen. La semicircunferencia y el diámetro se cortan en ángulos rectos y por ser conforme la transformación dada por $p(z)$ lo mismo debe ocurrir con las imágenes.

Ejemplo 1

Para el polinomio $z^3 + 2z^2 + z + 1$ se ve que la curva circunvala positivamente el origen tres veces.
El polinomio tiene las tres raíces en el semiplano $\operatorname{Re}(z) < 0$.

```
p[z_] := z^3 + 2 z^2 + z + 1
g1 = ParametricPlot[{Re[p[2 e^i theta]], Im[p[2 e^i theta]]}, {theta, Pi/2, 3 Pi/2}];
g2 = ParametricPlot[{Re[p[i y]], Im[p[i y]]}, {y, -2, 2}];
g3 = Show[g1, g2, PlotRange -> All]
```

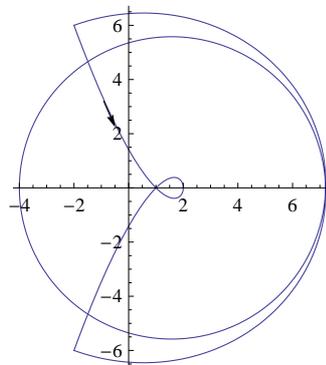


```
NSolve[z^3 + 2 z^2 + z + 1 == 0, z]
{{z -> -1.75488}, {z -> -0.122561 - 0.744862 i}, {z -> -0.122561 + 0.744862 i}}
```

Ejemplo 2

Para el polinomio $z^3 + z^2 + z + 2$ se ve que la curva circunvala positivamente una sola vez el origen.
El polinomio tiene una sola raíz en el semiplano $\operatorname{Re}(z) < 0$

```
p[z_] := z^3 + z^2 + z + 2
g1 = ParametricPlot[{Re[p[2 e^i theta]], Im[p[2 e^i theta]]}, {theta, Pi/2, 3 Pi/2}];
g2 = ParametricPlot[{Re[p[i y]], Im[p[i y]]}, {y, -2, 2}];
g3 = Show[g1, g2, PlotRange -> All]
```



`NSolve [z3 + z2 + z + 2 == 0, z]`

`{ {z → -1.35321}, {z → 0.176605 - 1.20282 i}, {z → 0.176605 + 1.20282 i} }`

Esquema de Routh

El esquema de Routh es un procedimiento algebraico que permite contar el número de circunvalaciones netas de una curva alrededor del origen. Para describirlo consideremos

$$i^{-n} p(i y) = (y^n - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} + \dots) - i (a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + a_5 y^{n-5} + \dots)$$

y sean

$$p_0(y) = y^n - a_2 y^{n-2} + a_4 y^{n-4} + \dots \quad y \quad p_1(y) = a_1 y^{n-1} - a_3 y^{n-3} + a_5 y^{n-5} + \dots$$

Para $-\infty < y < +\infty$ las curvas $p(i y)$ y $i^{-n} p(i y) = p_0(y) - i p_1(y)$ son una rotada de la otra y por lo tanto van en el mismo sentido. La curva que usaremos $\gamma = (p_0(y), p_1(y))$ que es simétrica de la anterior va en sentido contrario. Luego la cantidad de veces que la curva γ circunvala el origen es el negativo de las veces que $p(i y)$ lo circunvala.

El esquema de Routh es el siguiente:

Dividimos $p_0(y)$ por $p_1(y)$ y consideramos el resto $-p_2(y)$

$$p_0(y) = q_1(y) p_1(y) - p_2(y)$$

Dividimos $p_1(y)$ por $p_2(y)$ y consideramos el resto $-p_3(y)$:

$$p_1(y) = q_2(y) p_2(y) - p_3(y)$$

Así continuamos hasta obtener un último resto no nulo $p_r(y)$:

$$p_{r-2}(y) = q_{r-1}(y) p_{r-1}(y) - p_r(y)$$

$$p_{r-1}(y) = q_r(y) p_r(y)$$

Naturalmente $r \leq n$. Observe el signo que precede a los restos que es muy importante.

Claramente $p_r(y)$ es el máximo común divisor de $p_0(y)$ y $p_1(y)$ y como hemos supuesto que $p(z)$ no tiene raíces imaginarias puras, $p_0(y)$ y $p_1(y)$ no tienen raíz real en común, y entonces $p_r(y)$ no tiene raíces reales y conserva el signo en toda la recta.

De la misma manera se ve que dos sucesivos $p_i(y)$, $p_{i+1}(y)$ no pueden tener una raíz real común.

Consideremos la sucesión ordenada de polinomios $s(y) = \{p_0(y), p_1(y), p_2(y), \dots, p_r(y)\}$

y sea $w(y)$ la cantidad de variaciones de signo en esa sucesión ignorando los ceros si los hubiere.

Por ejemplo, en la sucesión $\{-1, 2, 3, 0, 0, -2, 1, 1, 4\}$ hay 3 variaciones de signo:

en $-1, 2$; en $3, -2$ y en $-2, 4$.

Demostraremos que $w(y)$ puede variar únicamente en los ceros reales de $p_0(y)$, que es donde γ

corta al eje vertical, y que $\frac{n}{2} - \frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2}$ es el número de raíces en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$.

Antes de hacer las demostraciones veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Para $p(z) = z^4 + z^3 - z - 1$ $s(y) = \{y^4 - 1, y^3 + y, y^2 + 1\}$

Los ceros reales de $p_0(y)$ son ± 1 y

$w(-\infty) = w(y) = 2$ si $y < -1$, $w(y) = 1$ si $-1 \leq y \leq 1$, $w(+\infty) = w(y) = 0$ si $1 < y$

$$\frac{n}{2} - \frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2} = 3$$

Calculando se ve que hay tres raíces en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$

```
NSolve[z^4 + z^3 - z - 1, z]
```

```
{{z -> -1.}, {z -> -0.5 - 0.866025 i}, {z -> -0.5 + 0.866025 i}, {z -> 1.}}
```

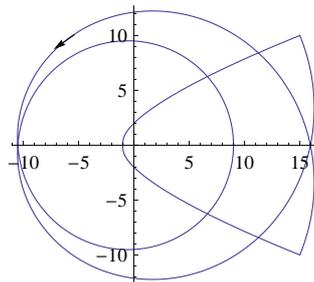
Mostramos la curva.

```
p[z_] := z^4 + z^3 - z - 1
```

```
g1 = ParametricPlot[{Re[p[2 e^i theta]], Im[p[2 e^i theta]]}, {theta, 0, 2 Pi}];
```

```
g2 = ParametricPlot[{Re[p[i y]], Im[p[i y]]}, {y, -2, 2}];
```

```
Show[g1, g2, PlotRange -> All]
```



Ejemplo 2

Para $p(z) = z^3 + z^2 + z + 2$ es $s(y) = \{y^3 - y, y^2 - 2, -y, 2\}$

y $p_0(y) = y(y^2 - 1)$ tiene raíces reales en $0, \pm 1$.

$w(y) = 1$ si $y \leq -1$ $w(y) = 2$ si $-1 < y < 0$

$w(y) = 1$ si $0 \leq y \leq 1$ $w(y) = 2$ si $1 < y$

$$\frac{n}{2} - \frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2} = 1$$

Calculamos y comprobamos que hay una sola raíz en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$.

```
NSolve[z^3 + z^2 + z + 2, z]
```

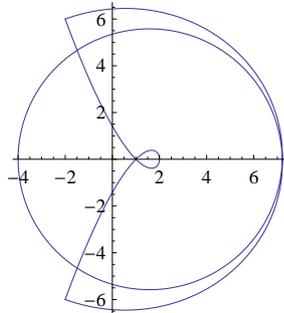
```
{{z -> -1.35321}, {z -> 0.176605 - 1.20282 i}, {z -> 0.176605 + 1.20282 i}}
```

Mostramos la curva.

```

p[z_] := z^3 + z^2 + z + 2
g1 = ParametricPlot[{Re[p[2 e^{i \theta}]], Im[p[2 e^{i \theta}]]}, {\theta, \frac{\pi}{2}, \frac{3 \pi}{2}}];
g2 = ParametricPlot[{Re[p[i y]], Im[p[i y]]}, {y, -2, 2}];
Show[g1, g2, PlotRange -> All]

```



Demostración

Veremos cómo $w(y)$ permite contar las veces que la curva γ atraviesa el eje vertical y en qué dirección lo cual nos indica las veces netas que circunvala al origen.

1) $w(y)$ es constante en cada intervalo en que no hay ceros reales de $p_0(y)$. En efecto:

- si en un intervalo no hay ceros de ningún $p_i(y)$ entonces claramente $w(y)$ es constante en ese intervalo.

- si hay un cero y_0 de algunos $p_i(y)$ con $1 \leq i \leq r$ entonces $p_{i-1}(y_0)$ y $p_{i+1}(y_0)$ según lo visto son no nulos y tiene signos distintos pues $p_{i-1}(y_0) = q_i(y_0) p_i(y_0) - p_{i+1}(y_0)$ Luego

$$\text{signo de } p_{i-1}(y_0^-) = \text{signo de } p_{i-1}(y_0) = \text{signo de } p_{i-1}(y_0^+)$$

$$\text{signo de } p_{i+1}(y_0^-) = \text{signo de } p_{i+1}(y_0) = \text{signo de } p_{i+1}(y_0^+)$$

y entonces las tres sucesiones $p_{i-1}(y_0^-)$, $p_i(y_0^-)$, $p_{i+1}(y_0^-)$

$$p_{i-1}(y_0), p_i(y_0), p_{i+1}(y_0)$$

$$p_{i-1}(y_0^+), p_i(y_0^+), p_{i+1}(y_0^+)$$

presentan una sola variación de signo cada una. Ello prueba que $w(y_0^-)$, $w(y_0)$, $w(y_0^+)$ son iguales.

Luego la $w(y)$ puede cambiar únicamente en los ceros de $p_0(y)$.

2) Si y_0 es un cero de $p_0(y)$ la curva γ corta al eje vertical en $(0, p_1(y_0))$.

a) Si $p_1(y_0) > 0$ puede ser $a_1) p_0(y_0^-) < 0 < p_0(y_0^+)$ $a_2) p_0(y_0^+) < 0 < p_0(y_0^-)$
 $a_3) p_0(y_0^-) > 0, p_0(y_0^+) > 0$ $a_4) p_0(y_0^-) < 0, p_0(y_0^+) < 0$

En el caso $a_1)$ la curva γ va del cuadrante 2 al cuadrante 1 atravesando el semieje vertical positivo

$$\text{y como } \begin{cases} s(y_0^-) = \{-, +, \dots\} \\ s(y_0^+) = \{+, +, \dots\} \end{cases} \quad w(y) \text{ disminuye en 1 al pasar de } y_0^- \text{ a } y_0^+$$

En el caso $a_2)$ la curva γ va del cuadrante 1 al cuadrante 2 atravesando el semieje vertical positivo

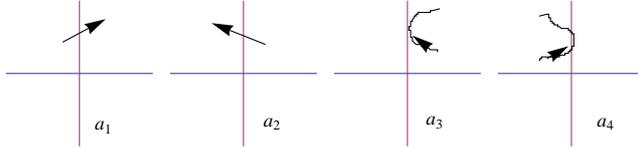
$$\text{y como } \begin{cases} s(y_0^-) = \{+, +, \dots\} \\ s(y_0^+) = \{-, +, \dots\} \end{cases} \quad w(y) \text{ aumenta en 1 al pasar de } y_0^- \text{ a } y_0^+$$

En los casos $a_3)$ y $a_4)$ la curva γ toca pero no atraviesa el eje vertical

y $w(y)$ no cambia al pasar de y_0^- a y_0^+

Representamos gráficamente estos 4 casos.

```
g = ParametricPlot[{{x, 0}, {0, x}}, {x, -1, 1}, Axes -> False];
GraphicsGrid[{{g, g, g, g}}]
```



- b) Si $p_1(y_0) < 0$ puede ser $b_1) p_0(y_0^-) < 0 < p_0(y_0^+)$ $b_2) p_0(y_0^+) < 0 < p_0(y_0^-)$
 $b_3) p_0(y_0^-) > 0, p_0(y_0^+) > 0$ $b_4) p_0(y_0^-) < 0, p_0(y_0^+) < 0$

En el caso $b_1)$ la curva γ va del cuadrante 3 al cuadrante 4 atravesando el semieje vertical negativo

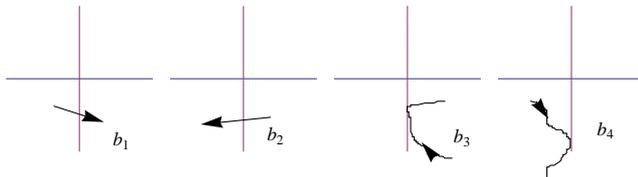
y como $\begin{cases} s(y_0^-) = \{-, -, ..\} \\ s(y_0^+) = \{-, +, ..\} \end{cases}$ $w(y)$ aumenta en 1 al pasar de y_0^- a y_0^+

En el caso $b_2)$ la curva γ va del cuadrante 4 al cuadrante 3 atravesando el semieje vertical negativo

y como $\begin{cases} s(y_0^-) = \{+, -, ..\} \\ s(y_0^+) = \{-, -, ..\} \end{cases}$ $w(y)$ disminuye en 1 al pasar de y_0^- a y_0^+

En los casos b_3 y b_4 la curva γ no atraviesa el eje vertical
y $w(y)$ no cambia al pasar de y_0^- a y_0^+

```
g = ParametricPlot[{{x, 0}, {0, x}}, {x, -1, 1}, Axes -> False];
GraphicsGrid[{{g, g, g, g}}]
```



Luego los casos de interés son a_1, a_2, b_1, b_2 :

- γ en a_1 y b_2 circunvala positivamente y $w(y)$ disminuye en 1 en cada uno
- γ en a_2 y b_1 circunvala negativamente y $w(y)$ aumenta en 1 en cada uno

Si $y > 0$ es grande $w(y)$ es constante e igual a $w(+\infty)$ y $w(-y)$ es constante e igual a $w(-\infty)$.

Luego el número $\frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2}$ es la cantidad neta de veces que γ rodea al origen.

Por lo tanto $\frac{n}{2} - \frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2}$ es la cantidad de veces que la curva imagen del semicírculo por $p(z)$ rodea al origen y por lo tanto es la cantidad de raíces de $p(z)$ en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$.

Luego todas las raíces están en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$ si $\frac{n}{2} - \frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2} = n$

o equivalentemente $w(+\infty) - w(-\infty) = -n$.

Esto significa que $s(y) = \{p_0(y), p_1(y), p_2(y), \dots, p_r(y)\}$ debe perder n cambios de signo al ir desde $y = -\infty$ hasta $y = +\infty$

Ello es posible si hay n cambios de signo en $-\infty$ y los pierde todos al llegar a $+\infty$

O sea $r = n$ y $s(-\infty) = (-1)^n \{+, -, +, -, \dots\}$ tiene n cambios de signo: $w(-\infty) = n$

y $s(+\infty) = \{+, +, +, \dots, \dots, +\}$ no tiene cambios de signo: $w(+\infty) = 0$

Pero ello equivale a que los coeficientes principales de los $p_i(y)$ sean mayores que cero.

Estas son las condiciones de Routh.

Condiciones de Routh

Todas las raíces tienen parte real negativa si y sólo si los coeficientes principales de los polinomios del esquema de Routh $\{p_0(y), p_1(y), \dots, p_r(y)\}$ son mayores que cero.

En general, $\frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2}$ mide la cantidad neta de veces que γ rodea el origen.

Por lo tanto $\frac{n}{2} - \frac{w(+\infty) - w(-\infty)}{2}$ es la cantidad de veces que la curva imagen del semicírculo por $p(z)$ rodea al origen y por lo tanto es la cantidad de raíces de $p(z)$ en el semiplano $\text{Re}(z) < 0$.

Para polinomios de grado 3 $p(y) = y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3$ se tiene

$$p_0(y) = y^3 - a_2 y ; p_1(y) = a_1 y^2 - a_3 ; p_2(y) = \left(a_2 - \frac{a_3}{a_1}\right) y ; p_3(y) = a_3$$

y las condiciones de Routh son $a_1 > 0, \left(a_2 - \frac{a_3}{a_1}\right) > 0, a_3 > 0$ que son equivalentes a

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_1 a_2 > a_3$$

Para polinomios de grado 4 $p(y) = y^4 + a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4$ se tiene

$$i^{-4} p(i y) = (y^4 - a_2 y^2 + a_4) - i(a_1 y^3 - a_3 y)$$

$$p_0(y) = y^4 - a_2 y^2 + a_4 ; p_1(y) = a_1 y^3 - a_3 y ; p_2(y) = \left(a_2 - \frac{a_3}{a_1}\right) y^2 - a_4 ; p_3(y) = \left(a_3 - \frac{a_1 a_4}{\left(a_2 - \frac{a_3}{a_1}\right)}\right) y ; p_4(y) = a_4$$

y las condiciones de Routh son $a_1 > 0, \left(a_2 - \frac{a_3}{a_1}\right) > 0, \left(a_3 - \frac{a_1 a_4}{\left(a_2 - \frac{a_3}{a_1}\right)}\right) > 0, a_4 > 0$ que son equivalentes a

$$a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0, a_4 > 0, a_3 a_2 a_1 - a_3^2 > a_1^2 a_4$$

Ejemplo 1

Estudiamos el polinomio de grado 5 $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + k$

a) Construimos el esquema de Routh.

```
Clear[k]; p[x_] := x^5 + 5 x^4 + 10 x^3 + 11 x^2 + 7 x + k
```

```
i^-5 p[i y] // Expand
```

```
-i k + 7 y + 11 i y^2 - 10 y^3 - 5 i y^4 + y^5
```

```
p0[y_] := y^5 - 10 y^3 + 7 y
```

```
p1[y_] := 5 y^4 - 11 y^2 + k
```

```
p2[y_] := -PolynomialRemainder[p0[y], p1[y], y]
```

```
p3[y_] := -PolynomialRemainder[p1[y], p2[y], y]
```

```
p4[y_] := -PolynomialRemainder[p2[y], p3[y], y]
```

```
p5[y_] := -PolynomialRemainder[p3[y], p4[y], y]
```

```
{p0[y], p1[y], p2[y], p3[y], p4[y], p5[y]}
```

```
{7 y - 10 y^3 + y^5, k - 11 y^2 + 5 y^4, -\left(7 - \frac{k}{5}\right) y + \frac{39 y^3}{5},
```

```
-k - \left(-\frac{254}{39} - \frac{5 k}{39}\right) y^2, -\left(-7 + \frac{k}{5} + \frac{39 k}{5 \left(\frac{254}{39} + \frac{5 k}{39}\right)}\right) y, k}
```

```
Reduce[
```

```
\left\{7 - \frac{k}{5} - \frac{39 k}{5 \left(\frac{254}{39} + \frac{5 k}{39}\right)} > 0, -k - \left(-\frac{254}{39} - \frac{5 k}{39}\right) > 0, -\left(-7 + \frac{k}{5} + \frac{39 k}{5 \left(\frac{254}{39} + \frac{5 k}{39}\right)}\right) > 0, k > 0\right\}, k] // N
```

```
0. < k < 5.46299
```

Luego es estable para $0 < k < 5.46299 \dots$

Luego es estable para $0 < k < 5.46299 \dots$

b) Si no deseamos ver resultados intermedios hacemos el siguiente algoritmo.

Sólo ingresamos el polinomio y el algoritmo hace el resto y nos da el resultado.

```

p[x_] := x5 + 5 x4 + 10 x3 + 11 x2 + 7 x + k
p0[y_] := ComplexExpand[Im[p[i y]]]
p1[y_] := ComplexExpand[Re[p[i y]]]
p2[y_] := -PolynomialRemainder[p0[y], p1[y], y]
p3[y_] := -PolynomialRemainder[p1[y], p2[y], y]
p4[y_] := -PolynomialRemainder[p2[y], p3[y], y]
p5[y_] := -PolynomialRemainder[p3[y], p4[y], y]
s = {p0[y], p1[y], p2[y], p3[y], p4[y], p5[y]};
w = Table[Coefficient[s[[i]], y, 6 - i] > 0, {i, 1, 6}];
Reduce[w] // N
0. < k < 5.46299
    
```

Para estar más seguros de la bondad del resultado podemos ponerlo a prueba.

```

k = 5; p[x_] := x5 + 5 x4 + 10 x3 + 11 x2 + 7 x + k; NSolve[p[x] == 0, x]
{{x -> -2.37339}, {x -> -1.28186 - 1.10809 i}, {x -> -1.28186 + 1.10809 i},
{x -> -0.0314425 - 0.856028 i}, {x -> -0.0314425 + 0.856028 i}}

k = 6; p[x_] := x5 + 5 x4 + 10 x3 + 11 x2 + 7 x + k; NSolve[p[x] == 0, x]
{{x -> -2.43359}, {x -> -1.31555 - 1.18684 i}, {x -> -1.31555 + 1.18684 i},
{x -> 0.0323485 - 0.885622 i}, {x -> 0.0323485 + 0.885622 i}}
    
```

c) Criterio de Hurwitz. Asociamos al polinomio mónico de grado n una matriz $n \times n$ de la siguiente manera

$$p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Entonces el criterio de Hurwitz establece que todas las raíces del polinomio tienen parte real negativa si y sólo si los menores principales de la matriz son mayores que cero:

$$a_1 > 0, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} > 0, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} > 0, \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 \end{pmatrix} > 0, \dots$$

La demostración de este criterio está más allá del curso.

Para el polinomio $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 11x^2 + 7x + k$ se tiene

$$\left\{ \text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 11 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}, \text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 11 & k \\ 1 & 10 & 7 \\ 0 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 11 & k & 0 \\ 1 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & k \\ 0 & 1 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \text{Det} \begin{bmatrix} 5 & 11 & k & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & k & 0 \\ 0 & 1 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 11 & k \end{bmatrix} \right\}$$

$$\{39, 254 + 5k, 1778 - 320k - k^2, 1778k - 320k^2 - k^3\}$$

```
Reduce[{254 + 5 k > 0, 1778 - 320 k - k^2 > 0, 1778 k - 320 k^2 - k^3 > 0}, k] // N
0. < k < 5.46299
```

Ejemplo 2

Estudiamos el polinomio de grado 5 $x^5 + 5x^4 + kx^3 + 4x^2 + 3x + \frac{1}{2}$

a) Mediante el esquema de Routh

```
Clear[k]; p[x_] := x^5 + 5 x^4 + k x^3 + 4 x^2 + 3 x + 1/2
i^-5 p[i y] // Expand
- i/2 + 3 y + 4 i y^2 - k y^3 - 5 i y^4 + y^5
p0[y_] := y^5 - k y^3 + 3 y
p1[y_] := 5 y^4 - 4 y^2 + 1/2
p2[y_] := -PolynomialRemainder[p0[y], p1[y], y]
p3[y_] := -PolynomialRemainder[p1[y], p2[y], y]
p4[y_] := -PolynomialRemainder[p2[y], p3[y], y]
p5[y_] := -PolynomialRemainder[p3[y], p4[y], y]
s = {p0[y], p1[y], p2[y], p3[y], p4[y], p5[y]};
w = Table[Coefficient[s[[i]], y, 6 - i] > 0, {i, 1, 6}];
Reduce[w] // N
5.29648 < k < 19.5035
```

b) Usando los menores de la matriz de Hurwitz asociada al polinomio

$$\left\{ \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & k \end{pmatrix} \right], \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 & \frac{1}{2} \\ 1 & k & 3 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \right], \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & k & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & k & 3 \end{pmatrix} \right], \text{Det} \left[\begin{pmatrix} 5 & 4 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & k & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & k & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right] \right\}$$

$$\left\{ -4 + 5k, -\frac{177}{2} + 20k, -\frac{1033}{4} + 62k - \frac{5k^2}{2}, -\frac{1033}{8} + 31k - \frac{5k^2}{4} \right\}$$

```
Reduce[{{-4 + 5 k > 0, -177/2 + 20 k > 0, -1033/4 + 62 k - 5 k^2/2 > 0, -1033/8 + 31 k - 5 k^2/4 > 0}, k] // N
5.29648 < k < 19.5035
```