

CAPÍTULO

18

Cuadripolos

Contenido del capítulo

- 18.1. Ecuaciones de los terminales
- 18.2. Parámetros de un cuadripolo
- 18.3. Análisis de un cuadripolo con terminación
- 18.4. Cuadripolos interconectados

Hasta el momento nos hemos centrado especialmente en el comportamiento de los circuitos en una pareja de terminales especificada. Recuerde cómo introdujimos los circuitos equivalentes de Thévenin y de Norton con el fin exclusivo de simplificar el análisis de circuitos en relación con una pareja de terminales dada. Al analizar algunos sistemas eléctricos, resulta conveniente también centrarse en dos parejas de terminales distintos. En particular, esto resulta útil cuando se introduce una señal a través de una pareja de terminales y a continuación, después de que el sistema procese la señal, se la extrae a través de una segunda pareja de terminales. Puesto que las parejas de terminales representan los puntos a través de los cuales se introducen o extraen señales en el sistema, se las suele denominar **puertos** del sistema. En este capítulo, vamos a limitar nuestro análisis a circuitos que tengan un puerto de entrada y un puerto de salida. La Figura 18.1 ilustra un circuito básico de doble puerto o **cuadripolo**. La utilización de este bloque componente está sujeta a diversas restricciones. En primer lugar, no puede haber energía almacenada en el circuito. En segundo lugar, tampoco puede haber dentro del circuito fuentes independientes; sin embargo, sí está permitido que existan fuentes dependientes. En tercer lugar, la corriente que entra a través de un puerto debe ser igual a la corriente que sale del mismo, es decir, $i_1 = i_1'$ e $i_2 = i_2'$. En cuarto lugar, todas las conexiones externas deben realizarse o bien con el puerto de entrada o bien con el puerto de salida; no está permitido realizar conexiones entre los puertos, es decir, entre los terminales a y c, a y d, b y c o b y d. Estas restricciones simplemente limitan el rango de los problemas de circuitos a los que son aplicables las fórmulas relativas a los cuadripolos.

El principio fundamental que subyace al modelado de un sistema como un cuadripolo es que sólo nos interesan las

variables en los terminales (i_1 , v_1 , i_2 y v_2). No nos interesa calcular las corrientes y tensiones internas al circuito. Ya hemos señalado la importancia del comportamiento en los terminales a la hora de analizar circuitos basados en amplificador operacional. En este capítulo, vamos a formalizar dicho enfoque introduciendo los parámetros de los cuadripolos.

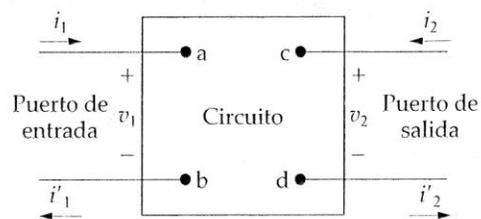


Figura 18.1. Circuito básico de doble puerto o cuadripolo.

Objetivos del capítulo

1. Ser capaz de calcular cualquier conjunto de parámetros de un cuadripolo mediante alguno de los siguientes métodos.
 - análisis de circuitos;
 - medidas realizadas en un circuito;
 - conversión a partir de otro conjunto de parámetros del cuadripolo utilizando la Tabla 18.1.
2. Ser capaz de analizar un cuadripolo con terminación para hallar las corrientes, las tensiones, las impedancias y los cocientes de interés utilizando la Tabla 18.2.
3. Saber cómo analizar una interconexión en cascada de cuadripolos.

18.1. Ecuaciones de los terminales

Al considerar un circuito como una red de doble puerto o cuadripolo, lo que nos interesa es relacionar la corriente y la tensión en uno de los puertos con la corriente y la tensión en el otro. La Figura 18.1 muestra las polaridades de referencia para las tensiones en los terminales y las direcciones de referencia para las corrientes que pasan a través de los terminales. Las referencias en ambos puertos son simétricas; es decir, en cada puerto la corriente entra por el terminal superior y la tensión de cada puerto representa un incremento desde el terminal inferior al terminal superior. Esta simetría hace que resulte más fácil generalizar el análisis de un cuadripolo y es la razón de que se la utilice con carácter general en toda la literatura técnica.

La descripción más general de un cuadripolo es la que puede realizarse en el dominio de s . Para redes puramente resistivas, el análisis se reduce a la resolución de una serie de circuitos resistivos. Los problemas de régimen permanente sinusoidal pueden resolverse encontrando primero las apropiadas expresiones en el dominio de s y luego sustituyendo s por $j\omega$, o mediante análisis directo en el dominio de la frecuencia. Aquí, escribiremos todas las ecuaciones en el dominio de s ; las redes resistivas y el análisis en régimen permanente sinusoidal serán simplemente casos especiales. La Figura 18.2 muestra el bloque componente básico en función de las variables en el dominio de s , es decir, I_1 , V_1 , I_2 y V_2 .



Figura 18.2. Bloque componente básico que representa un cuadripolo en el dominio de s .

De estas cuatro variables de los terminales, sólo dos de ellas son independientes. Así, para cualquier circuito, una vez que especifiquemos dos de las variables, podremos encontrar las dos incógnitas restantes. Por ejemplo, conociendo V_1 y V_2 y el circuito contenido dentro de la caja, podremos determinar I_1 e I_2 . Por tanto, podemos describir un cuadripolo mediante un sistema de sólo dos ecuaciones. Sin embargo, hay seis formas distintas en las que combinar las cuatro variables:

$$\begin{aligned} V_1 &= z_{11}I_1 + z_{12}I_2, \\ V_2 &= z_{21}I_1 + z_{22}I_2; \end{aligned} \quad (18.1)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= y_{11}V_1 + y_{12}V_2, \\ I_2 &= y_{21}V_1 + y_{22}V_2; \end{aligned} \quad (18.2)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}V_2 - a_{12}I_2, \\ I_1 &= a_{21}V_2 - a_{22}I_2; \end{aligned} \quad (18.3)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= b_{11}V_1 - b_{12}I_1, \\ I_2 &= b_{21}V_1 - b_{22}I_1; \end{aligned} \quad (18.4)$$

$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11}I_1 + h_{12}V_2, \\ I_2 &= h_{21}I_1 + h_{22}V_2; \end{aligned} \quad (18.5)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11}V_1 + g_{12}I_2, \\ V_2 &= g_{21}V_1 + g_{22}I_2. \end{aligned} \quad (18.6)$$

Estos seis conjuntos de ecuaciones pueden también considerarse como tres parejas de relaciones mutuamente inversas. La primera pareja, las Ecuaciones 18.1, proporciona las tensiones de entrada y de salida en función de las corrientes de entrada y de salida. El segundo conjunto, las Ecuaciones 18.2, nos da la relación inversa, es decir, las corrientes de entrada y de salida en función de las tensiones de entrada y de salida. Las Ecuaciones 18.3 y 18.4 también representan relaciones inversas, al igual que las Ecuaciones 18.5 y 18.6.

Los coeficientes de las variables de corriente y/o tensión en el lado derecho de las Ecuaciones 18.1–18.6 se denominan **parámetros** del cuadripolo. Así, cuando utilicemos las Ecuaciones 18.1, nos referiremos a los parámetros z del circuito. De forma similar, haremos referencia en cada caso a los parámetros y , a , b , h y g de la red.

18.2. Parámetros de un cuadripolo

Podemos determinar los parámetros de cualquier circuito aplicando técnicas de análisis o mediante medidas realizadas en el circuito. Los cálculos o medidas que haya que realizar se deducen directamente de las ecuaciones de los parámetros. Por ejemplo, suponga que el problema consiste en hallar los parámetros z de un circuito. A partir de las Ecuaciones 18.1,

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \Omega, \quad (18.7)$$

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \Omega, \quad (18.8)$$

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} \quad \Omega, \quad (18.9)$$

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} \quad \Omega. \quad (18.10)$$

Las Ecuaciones 18.7-18.10 revelan que los cuatro parámetros z pueden describirse de la forma siguiente:

- z_{11} es la impedancia vista al mirar en el puerto 1 cuando el puerto 2 está abierto;
- z_{12} es una impedancia de transferencia que es igual al cociente entre la tensión del puerto 1 y la corriente del puerto 2 cuando el puerto 1 está abierto;
- z_{21} es una impedancia de transferencia que es igual al cociente entre la tensión del puerto 2 y la corriente del puerto 1 cuando el puerto 2 está abierto;
- z_{22} es la impedancia vista al mirar en el puerto 2 cuando el puerto 1 está abierto.

Por tanto, los parámetros de impedancia pueden calcularse o medirse abriendo primero el puerto 2 y determinando los cocientes V_1/I_1 y V_2/I_1 , y luego abriendo el puerto 1 y determinando los cocientes V_1/I_2 y V_2/I_2 . El Ejemplo 18.1 ilustra la determinación de los parámetros z para un circuito resistivo.

EJEMPLO 18.1 Determinación de los parámetros z en un cuadripolo

Calcule los parámetros z para el circuito mostrado en la Figura 18.3.

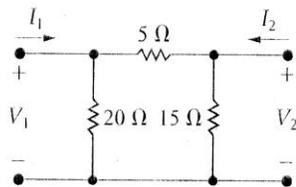


Figura 18.3. Circuito del Ejemplo 18.1.

SOLUCIÓN

El circuito es puramente resistivo, por lo que el circuito equivalente en el dominio de s también será puramente resistivo. Con el puerto 2 abierto, es decir, con $I_2 = 0$, la resistencia que se ve al mirar hacia el puerto 1 es la resistencia de 20Ω en paralelo con la combinación en serie de las resistencias de 5 y 15Ω . Por tanto,

$$z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{(20)(20)}{40} = 10 \Omega.$$

Cuando I_2 es cero, V_2 es

$$V_2 = \frac{V_1}{15+5}(15) = 0,75V_1,$$

Las Ecuaciones 18.7-18.10 y el Ejemplo 18.1 muestran por qué los parámetros de las Ecuaciones 18.1 se denominan parámetros z . Cada parámetro es el cociente entre una tensión y una corriente, por lo que se trata de una impedancia y tiene como dimensión los ohmios.

Podemos utilizar el mismo proceso para determinar los restantes parámetros de los puertos, los cuales pueden calcularse o medirse. Cada parámetro de un puerto se obtiene abriendo o cortocircuitando un puerto. Además, cada parámetro de puerto será una impedancia, una admitancia o un cociente adimensional. El cociente adimensional es el cociente de dos tensiones o de dos corrientes. Las Ecuaciones 18.11-18.15 resumen estas observaciones.

$$\begin{aligned} y_{11} &= \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} \text{ S}, & y_{12} &= \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} \text{ S}, \\ y_{21} &= \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} \text{ S}, & y_{22} &= \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} \text{ S}. \end{aligned} \quad (18.11)$$

por lo que

$$z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} = \frac{0,75V_1}{V_1/10} = 7,5 \Omega.$$

Cuando I_1 es cero, la resistencia que se ve al mirar hacia el puerto 2 es la resistencia de 15Ω en paralelo con la combinación en serie de las resistencias de 5 y 20Ω . Por tanto,

$$z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{(15)(25)}{40} = 9,375 \Omega.$$

Cuando el puerto 1 está abierto, I_1 es cero y la tensión V_1 es

$$V_1 = \frac{V_2}{5+20}(20) = 0,8V_2.$$

Con el puerto 1 abierto, la corriente que entra por el puerto 2 es

$$I_2 = \frac{V_2}{9,375}.$$

Por tanto,

$$z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} = \frac{0,8V_2}{V_2/9,375} = 7,5 \Omega.$$

18.4. Cuadripolos interconectados

La síntesis de un sistema complejo y de gran tamaño suele resultar más sencilla si primero se diseñan una serie de subsecciones del sistema. Después, el sistema puede completarse interconectando estas unidades más simples y fáciles de diseñar. Si se modelan las subsecciones mediante cuadripolos, el procedimiento de síntesis implicará analizar una serie de cuadripolos interconectados.

Los cuadripolos pueden interconectarse de cinco formas distintas: (1) en cascada, (2) en serie, (3) en paralelo, (4) mediante conexión serie-paralelo y (5) mediante conexión paralelo-serie. La Figura 18.9 muestra estas cinco formas básicas de interconexión.

Vamos a analizar e ilustrar en esta sección únicamente la conexión en cascada. Sin embargo, si las otras cuatro conexiones cumplen ciertos requisitos, podemos obtener los parámetros que describen los circuitos interconectados simplemente sumando los parámetros individuales de cada red. En particular, los parámetros z describen la conexión en serie, los parámetros y la conexión en paralelo, los parámetros h la conexión serie-paralelo y los parámetros g la conexión paralelo-serie¹.

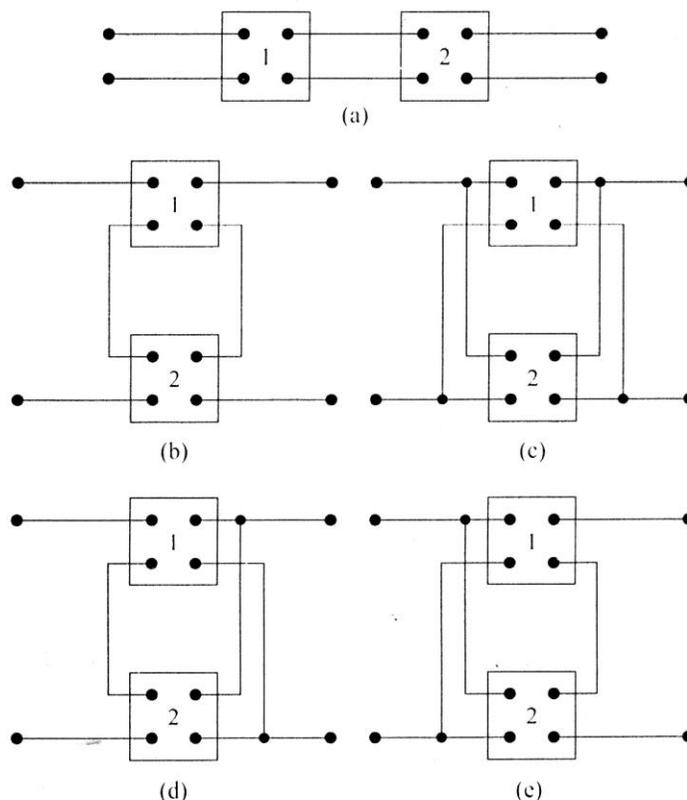


Figura 18.9. Las cinco formas básicas de interconexión de cuadripolos. (a) En cascada. (b) En serie. (c) En paralelo. (d) Con conexión serie-paralelo. (e) Con conexión paralelo-serie.

¹ El lector interesado puede encontrar una explicación detallada de estas cuatro interconexiones en el libro de Henry Ruston y Joseph Bordogna, *Electric Networks: Functions, Filters, Analysis* (Nueva York: McGraw-Hill, 1966), Capítulo 4.

26.6 PARÁMETROS DE IMPEDANCIA (z)

Para la configuración de dos puertos de la figura 26.22, están especificadas cuatro variables. En la mayoría de los casos, si dos variables cualesquiera están especificadas, las dos restantes pueden ser determinadas. Estas cuatro variables pueden relacionarse mediante las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2} \quad (26.22a)$$

$$\boxed{E_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2} \quad (26.22b)$$

Los **parámetros de impedancia** z_{11} , z_{12} y z_{22} están medidos en ohms.

Para modelar el sistema, cada parámetro de impedancia debe ser determinado estableciendo una variable particular en cero.

z_{11}

Para z_{11} , si I_2 se establece en cero, como se muestra en la figura 26.23, la ecuación (26.22a) resulta en:

$$E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}(0)$$

y

$$\boxed{z_{11} = \frac{E_1}{I_1}}_{I_2 = 0} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (26.23)$$

La ecuación (26.23) revela que con I_2 igual a cero, el parámetro de impedancia está determinado por la razón resultante de E_1 a I_1 . Como E_1 e I_1 son cantidades de entrada, con I_2 establecida en cero, el parámetro z_{11} formalmente se denota en la siguiente forma:

$$z_{11} = \text{parámetro de impedancia de entrada a circuito abierto}$$

z_{12}

Para z_{12} , I_1 se establece en cero, y la ecuación (26.22a) resulta en:

$$\boxed{z_{12} = \frac{E_1}{I_2}}_{I_1 = 0} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (26.24)$$

Para la mayoría de los sistemas donde deben compararse cantidades de entrada y salida, la razón de interés es usualmente la de la cantidad de salida dividida entre la cantidad de entrada. En este caso, lo *inverso* es cierto, resultando lo siguiente:

$$z_{12} = \text{parámetro de impedancia de transferencia inversa a circuito abierto}$$

El término *transferencia* está incluido para indicar que z_{12} relacionará una cantidad de entrada con una de salida (para la condición $I_1 = 0$). La configuración de red para determinar z_{12} se muestra en la figura 26.24.

z_{21}

Para determinar z_{21} , establezca I_2 igual a cero y encuentre la razón E_2/I_1 de acuerdo con la ecuación (26.22b). Es decir,

$$\boxed{z_{21} = \frac{E_2}{I_1}}_{I_2 = 0} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (26.25)$$

En este caso, las cantidades de entrada y de salida son de nuevo las variables determinantes, requiriendo el término *transferencia* en la nomenclatura. Sin embargo, la razón es de una cantidad de salida a una de entrada, por lo que se aplica el término descriptivo *directa*, y

$$z_{21} = \text{parámetro de impedancia de transferencia directa a circuito abierto}$$

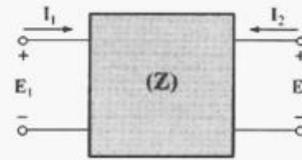


FIGURA 26.22
Parámetros de impedancia para una configuración de dos puertos.

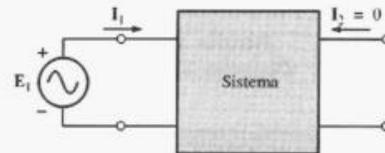


FIGURA 26.23
Determinación de z_{11} .

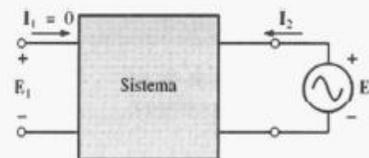


FIGURA 26.24
Determinación de z_{12} .

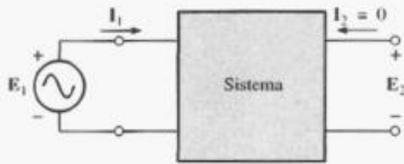


FIGURA 26.25
Determinación de z_{21} .

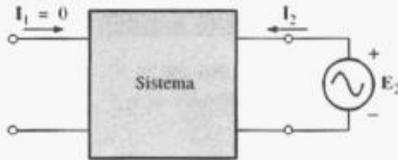


FIGURA 26.26
Determinación de z_{22} .

z_{21} = parámetro de impedancia de transferencia directa a circuito abierto

La red que la determina se muestra en la figura 26.25. Para un voltaje aplicado E_1 , se determina z_{21} mediante la razón E_2/I_1 con I_2 establecida en cero.

z_{22}

El parámetro restante, z_{22} , está determinado por:

$$z_{22} = \frac{E_2}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} \quad (\text{ohms, } \Omega) \quad (26.26)$$

de acuerdo con la ecuación (26.22b) con I_1 establecida en cero. Como ésta es la razón del voltaje de salida a la corriente de salida con I_1 establecida en cero, tiene la terminología

z_{22} = parámetro de impedancia de salida a circuito abierto

La red requerida se muestra en la figura 26.26. Para un voltaje aplicado E_2 , se determina z_{22} por medio de la razón resultante E_2/I_2 con $I_1 = 0$.

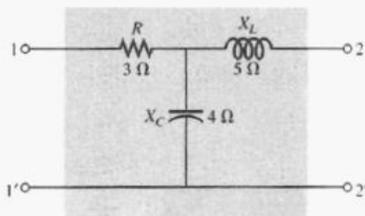


FIGURA 26.27
Configuración T.

EJEMPLO 26.7 Determine los parámetros de impedancia (z) para la red T de la figura 26.27.

Solución Para z_{11} , la red se verá como en la figura 26.28, con $Z_1 = 3 \Omega \angle 0^\circ$, $Z_2 = 5 \Omega \angle 90^\circ$, y $Z_3 = 4 \Omega \angle -90^\circ$:

$$I_1 = \frac{E_1}{Z_1 + Z_3}$$

Así:

$$z_{11} = \frac{E_1}{I_1} \Big|_{I_2 = 0}$$

y

$$z_{11} = Z_1 + Z_3 \quad (26.27)$$

Para z_{12} , la red se verá como en la figura 26.29, y

$$E_1 = I_2 Z_3$$

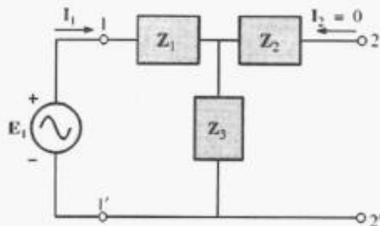


FIGURA 26.28
Determinación de z_{11} .

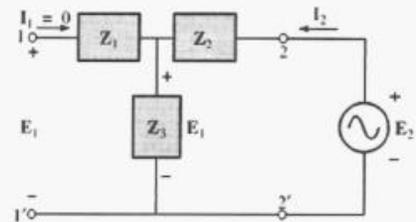


FIGURA 26.29
Determinación de z_{12} .

Entonces:

$$z_{12} = \frac{E_1}{I_2} \Big|_{I_1 = 0} = \frac{I_2 Z_3}{I_2}$$

y

$$z_{12} = Z_3 \quad (26.28)$$

Para z_{21} , la red requerida aparece en la figura 26.30, y

Entonces,
$$z_{21} = \left. \frac{E_2}{I_1} \right|_{I_2 = 0} = \frac{I_1 Z_3}{I_1}$$

y

$$z_{21} = Z_3$$

(26.29)

Para z_{22} , la configuración determinante se muestra en la figura 26.31, e

$$I_2 = \frac{E_2}{Z_2 + Z_3}$$

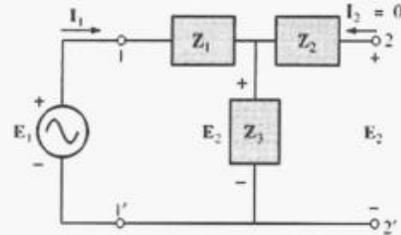


FIGURA 26.30
Determinación de z_{21} .

Entonces:
$$z_{22} = \left. \frac{E_2}{I_2} \right|_{I_1 = 0} = \frac{I_2(Z_2 + Z_3)}{I_2}$$

y

$$z_{22} = Z_2 + Z_3$$

(26.30)

Observe que para la configuración T, $z_{12} = z_{21}$. Para $Z_1 = 3 \Omega \angle 0^\circ$, $Z_2 = 5 \Omega \angle 90^\circ$, y $Z_3 = 4 \Omega \angle -90^\circ$, tenemos:

$$z_{11} = Z_1 + Z_3 = 3 \Omega - j 4 \Omega$$

$$z_{12} = z_{21} = Z_3 = 4 \Omega \angle -90^\circ = -j 4 \Omega$$

$$z_{22} = Z_2 + Z_3 = 5 \Omega \angle 90^\circ + 4 \Omega \angle -90^\circ = 1 \Omega \angle 90^\circ = j 1 \Omega$$

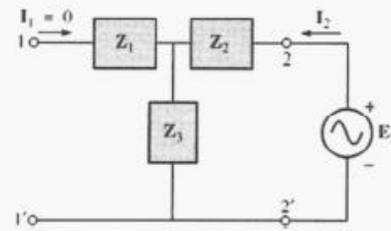


FIGURA 26.31
Determinación de z_{22} .

Para un conjunto de parámetros de impedancia, el comportamiento en las terminales (externo) del dispositivo o red dentro de la configuración de la figura 26.22 está determinado. Un *circuito equivalente* para el sistema puede ser desarrollado usando los parámetros de impedancia y las ecuaciones (26.22a) y (26.22b). Dos posibilidades para los parámetros de impedancia aparecen en la figura 26.32.

Aplicar la ley de voltaje de Kirchhoff a los lazos de entrada y salida de la red de la figura 26.32(a) resulta en:

$$E_1 - z_{11}I_1 - z_{12}I_2 = 0$$

y

$$E_2 - z_{22}I_2 - z_{21}I_1 = 0$$

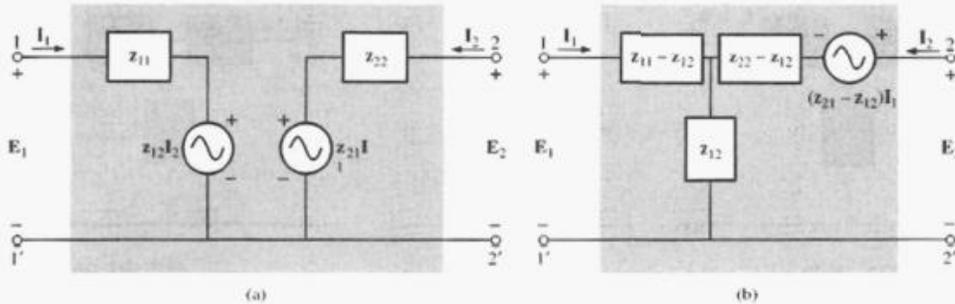


FIGURA 26.32
Dos posibles redes equivalentes de parámetros z , de dos puertos.

las cuales, reordenadas, se convierten en:

$$E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2 \quad E_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

coincidieron con las ecuaciones (26.22a) y (26.22b).

Para la red de la figura 26.32(b),

$$E_1 - I_1(z_{11} - z_{12}) - z_{12}(I_1 + I_2) = 0$$

y
$$E_2 - I_1(z_{21} - z_{12}) - I_2(z_{22} - z_{12}) - z_{12}(I_1 + I_2) = 0$$

$$E_1 - I_1(z_{11} - z_{12}) - z_{12}(I_1 + I_2) = 0$$

$$y \quad E_2 - I_1(z_{21} - z_{12}) - I_2(z_{22} - z_{12}) - z_{12}(I_1 + I_2) = 0$$

las cuales, reordenadas, son:

$$E_1 = I_1(z_{11} - z_{12} + z_{12}) + I_2 z_{12}$$

$$E_2 = I_1(z_{21} - z_{12} + z_{12}) + I_2(z_{22} - z_{12} + z_{12})$$

$$y \quad E_1 = z_{11}I_1 + z_{12}I_2$$

$$E_2 = z_{21}I_1 + z_{22}I_2$$

En cada red, observe la necesidad de una fuente de voltaje controlada por corriente, esto es, una fuente de voltaje cuya magnitud está determinada por una corriente particular de la red.

En cada red, observe la necesidad de una fuente de voltaje controlada por corriente, esto es, una fuente de voltaje cuya magnitud está determinada por una corriente particular de la red.

La utilidad de los parámetros de impedancia y las redes equivalentes resultantes pueden describirse considerando el sistema de la figura 26.33(a), el cual contiene un dispositivo (o sistema) para el que los parámetros de impedancia

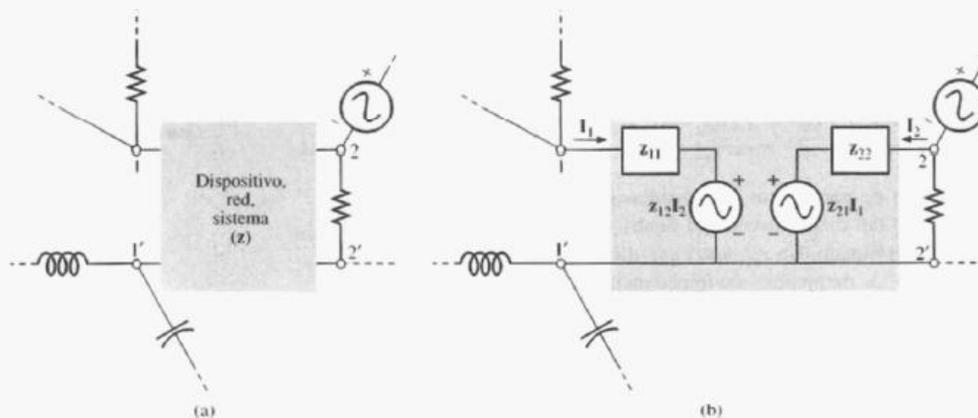


FIGURA 26.33

Sustitución de la red equivalente de parámetros z en un sistema complejo.

26.7 PARÁMETROS DE ADMITANCIA (y)

Las ecuaciones que relacionan las cuatro variables terminales de la figura 26.22 también pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\mathbf{I}_1 = y_{11}\mathbf{E}_1 + y_{12}\mathbf{E}_2 \quad (26.31a)$$

$$\mathbf{I}_2 = y_{21}\mathbf{E}_1 + y_{22}\mathbf{E}_2 \quad (26.31b)$$

Observe que en este caso cada término de cada ecuación tiene las unidades de corriente, en comparación con unidades de voltaje para cada término de las ecuaciones (26.22a) y (26.22b). Además, la unidad de cada coeficiente está en siemens, en comparación con los ohm empleados para los parámetros de impedancia.

Los parámetros de impedancia fueron determinados estableciendo una corriente particular igual a cero por medio de una condición de circuito abierto. Para los **parámetros de admitancia (y)** de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b), un voltaje se establece igual a cero por medio de una condición de corto circuito.

La terminología aplicada a cada uno de los parámetros de admitancia resulta directamente de los términos descriptivos aplicados a los parámetros de impedancia. Las ecuaciones para cada uno son determinadas directamente de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b) estableciendo un voltaje particular igual a cero.

Y_{11}

$$y_{11} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_1} \quad \text{(siemens, S)} \quad (26.32)$$

$E_2 = 0$

y_{11} = parámetro de admitancia de entrada a corto circuito

La red para su determinación aparece en la figura 26.35.

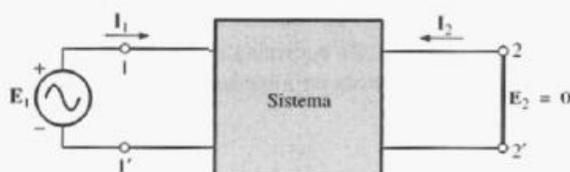


FIGURA 26.35
Determinación de y_{11} .

Y_{12}

$$y_{12} = \frac{\mathbf{I}_1}{\mathbf{E}_2} \quad \text{(siemens, S)} \quad (26.33)$$

$E_1 = 0$

y_{12} = parámetro de admitancia de transferencia inversa a corto circuito

La red para determinar y_{12} aparece en la figura 26.36.

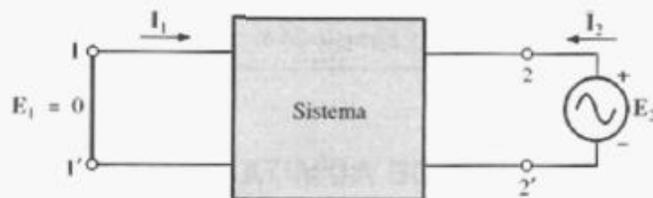


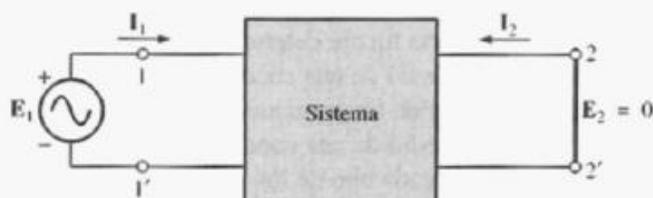
FIGURA 26.36
Determinación de y_{12} .

Y_{21}

$$y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \quad E_2 = 0 \quad (\text{siemens, S}) \quad (26.34)$$

y_{21} = parámetro de admitancia de transferencia directa a corto circuito

La red para determinar y_{21} aparece en la figura 26.37.



Y_{22}

$$y_{22} = \frac{I_2}{E_2} \quad E_1 = 0 \quad (\text{siemens, S}) \quad (26.35)$$

y_{22} = parámetro de admitancia de salida a corto circuito

La red requerida aparece en la figura 26.38.

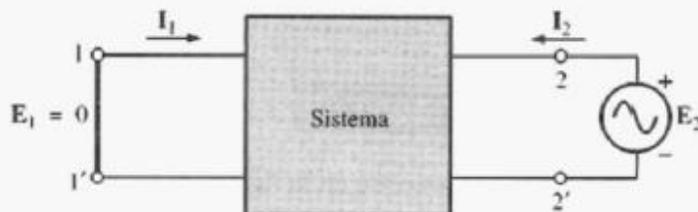


FIGURA 26.38

EJEMPLO 26.9 Determine los parámetros de admitancia para la red π de la figura 26.39.

Solución: La red para y_{11} aparecerá como se muestra en la figura 26.40, con:

$$Y_1 = 0.2 \text{ mS } \angle 0^\circ \quad Y_2 = 0.02 \text{ mS } \angle -90^\circ \quad Y_3 = 0.25 \text{ mS } \angle 90^\circ$$

Usamos: $I_1 = E_1 Y_T = E_1(Y_1 + Y_2)$

con: $y_{11} = \frac{I_1}{E_1} \Big|_{E_2 = 0}$

e $y_{11} = Y_1 + Y_2$ (26.36)

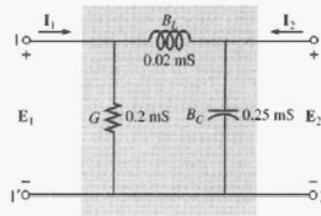


FIGURA 26.39 Red π .

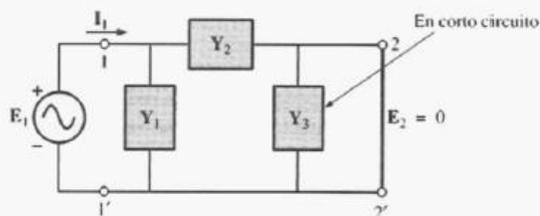


FIGURA 26.40 Determinación de y_{11} .

La red para determinar y_{12} aparece en la figura 26.41. Y_1 está en corto circuito; por lo que $I_{Y_2} = I_1$, e

$$I_{Y_2} = I_1 = -E_2 Y_2$$

El signo menos resulta de que la dirección definida de I_1 en la figura 26.41 es opuesta a la dirección real del flujo debido a la fuente aplicada E_2 ; es decir,

$$y_{12} = \frac{I_1}{E_2} \Big|_{E_1 = 0}$$

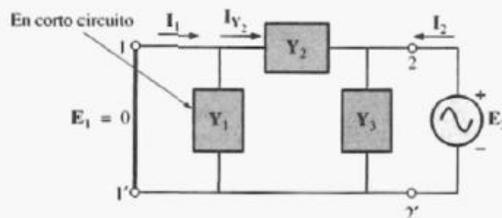


FIGURA 26.41 Determinación de y_{12} .

e $y_{12} = -Y_2$ (26.37)

La red empleada para y_{21} se muestra en la figura 26.42. En este caso, Y_3 está en corto circuito, resultando en:

$$I_{Y_2} = I_2 \quad \text{e} \quad I_{Y_2} = I_2 = -E_1 Y_2$$

con: $y_{21} = \frac{I_2}{E_1} \Big|_{E_2 = 0}$

e $y_{21} = -Y_2$ (26.38)

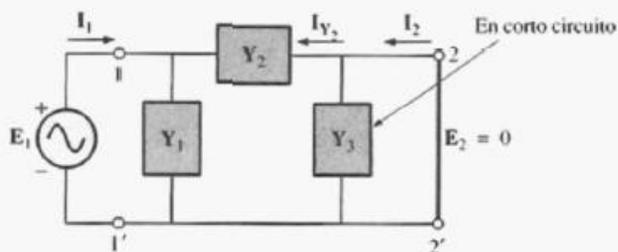


FIGURA 26.42
Determinación de y_{21} .

Observe que para la configuración π , $y_{12} = y_{21}$, ya se esperaba esta relación debido a que los parámetros de impedancia para la red T eran tales: $z_{12} = z_{21}$. Una red T puede ser convertida directamente a una red π usando la transformación Y- Δ .

La red para determinar y_{22} aparece en la figura 26.43, y

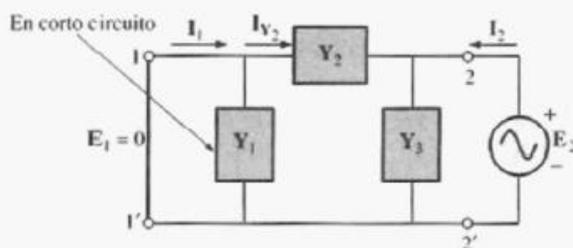


FIGURA 26.43
Determinación de y_{22} .

$$Y_T = Y_2 + Y_3 \quad e \quad I_2 = E_2(Y_2 + Y_3)$$

Entonces,

$$y_{22} = \left. \frac{I_2}{E_2} \right|_{E_1 = 0}$$

e

$$\boxed{y_{22} = Y_2 + Y_3} \quad (26.39)$$

Sustituyendo valores tenemos:

$$Y_1 = 0.2 \text{ mS } \angle 0^\circ$$

$$Y_2 = 0.02 \text{ mS } \angle -90^\circ$$

$$Y_3 = 0.25 \text{ mS } \angle 90^\circ$$

$$y_{11} = Y_1 + Y_2$$

$$= 0.2 \text{ mS} - j 0.02 \text{ mS } (L)$$

$$y_{12} = y_{21} = -Y_2 = -(-j 0.02 \text{ mS})$$

$$= j 0.02 \text{ mS } (C)$$

$$y_{22} = Y_2 + Y_3 = -j 0.02 \text{ mS} + j 0.25 \text{ mS}$$

$$= j 0.23 \text{ mS } (C)$$

Observe las similitudes entre los resultados para y_{11} e y_{22} en la red π comparados con z_{11} y z_{22} en la red T.

Dos redes que satisfacen las relaciones de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b) en sus terminales se muestran en la figura 26.44. Observe el uso de ramas pa-

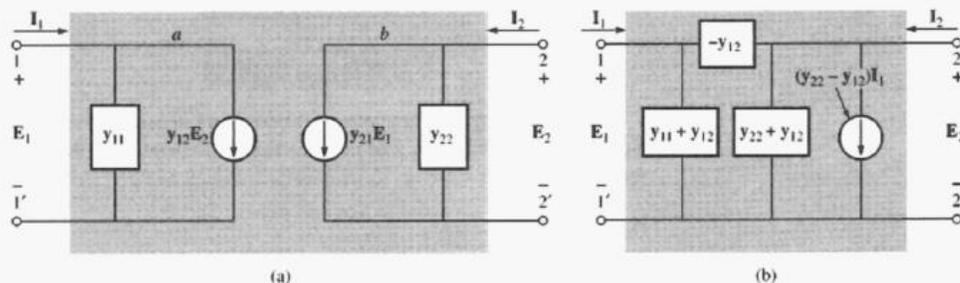


FIGURA 26.44

Dos posibles redes equivalentes de parámetros y , de dos puertos.

rales ya que cada término de las ecuaciones (26.31a) y (26.31b) tiene las unidades de corriente, y la ruta más directa al circuito equivalente es una aplicación de la ley de corriente de Kirchhoff en forma inversa. Esto es, se encuentra la red que satisface la relación de la ley de corriente de Kirchhoff. Para los parámetros de impedancia, cada término tenía las unidades de volts, por lo que la ley de voltaje de Kirchhoff fue aplicada en forma inversa para determinar la combinación en serie de elementos en el circuito equivalente de la figura 26.44(a).

Al aplicar la ley de corriente de Kirchhoff a la red de la figura 26.44(a), tenemos:

	Entrando	Saliendo
	┌──────────┴──────────┐	
Nodo a:	I_1	$= y_{11}E_1 + y_{12}E_2$
Nodo b:	I_2	$= y_{22}E_2 + y_{21}E_1$

que, cuando se reordenan, son las ecuaciones (26.31a) y (26.31b).

Para los resultados del ejemplo 26.9, aparecerá la red de la figura 26.45 si se emplea la red equivalente de la figura 26.44(a).

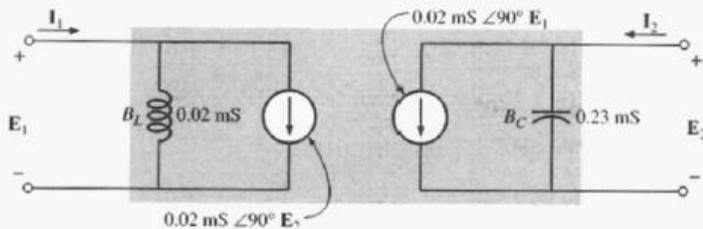


FIGURA 26.45

Red equivalente para los resultados del ejemplo 26.9.

Ejemplos resueltos:

1- Encontrar la matriz Y del siguiente circuito en el plano s.

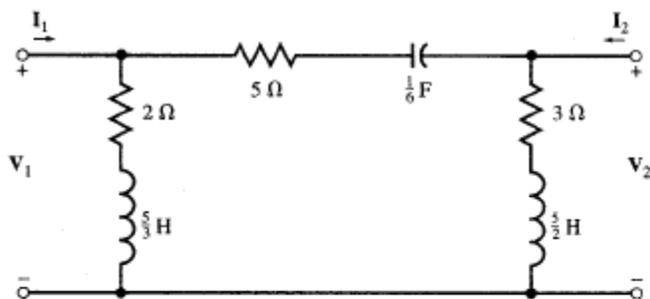


Fig. 13-5

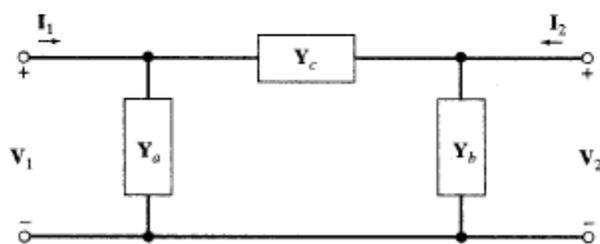


Fig. 13-6

$$Y_a = \frac{1}{2 + 5s/3} = \frac{3}{5s + 6}$$

$$Y_b = \frac{1}{3 + 5s/2} = \frac{2}{5s + 6}$$

$$Y_c = \frac{1}{5 + 6/s} = \frac{s}{5s + 6}$$

$$I_1 = V_1 Y_a + (V_1 - V_2) Y_c = (Y_a + Y_c) V_1 - Y_c V_2$$

$$I_2 = V_2 Y_b + (V_2 - V_1) Y_c = -Y_c V_1 + (Y_b + Y_c) V_2$$

$$Y_{11} = Y_a + Y_c$$

$$Y_{12} = Y_{21} = -Y_c$$

$$Y_{22} = Y_b + Y_c$$

$$Y_{11} = \frac{s + 3}{5s + 6}$$

$$Y_{12} = Y_{21} = \frac{-s}{5s + 6}$$

$$Y_{22} = \frac{s + 2}{5s + 6}$$

2- Encontrar los parámetros de impedancia del siguiente circuito:

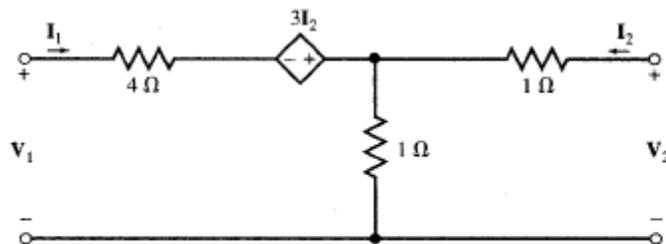


Fig. 13-18

$$V_1 = 4I_1 - 3I_2 + (I_1 + I_2) = 5I_1 - 2I_2$$

$$V_2 = I_2 + (I_1 + I_2) = I_1 + 2I_2$$

$$Z_{11} = 5, Z_{12} = -2, Z_{21} = 1, \text{ and } Z_{22} = 2.$$

3- Un circuito tiene los siguientes valores de parámetros h:

$$h_{11} = 500 \, \Omega \quad h_{12} = 10^{-4} \quad h_{21} = 100 \quad h_{22} = 2(10^{-6}) \, \Omega^{-1}$$

Dibujar el circuito equivalente que lo representa.

