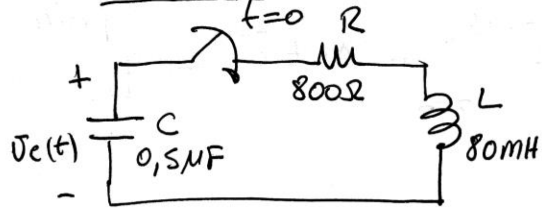
TRANSITORIO EN CIRCUITOS RLC

EJEMPLO 1



Se cierra la llave en $t=0$ con una tensión sobre C de 20V y una corriente en L de 30mA.
Calcular $v_C(t)$

De los datos $v_C(0) = 20V$, $i_L(0) = 30mA$, son las condiciones iniciales que se deben mantener. Al cerrar la llave se cumple la ley de Kirchhoff: $v_R + v_L + v_C = 0$

$$iR + L\frac{di}{dt} + v_C = 0 \qquad \text{como } i = i_C = C\frac{dv_C}{dt}$$

$$CR\frac{dv_C}{dt} + LC\frac{d^2v_C}{dt} + v_C = 0$$

$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0 \rightarrow \text{ecuación característica}$$

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0 \quad \begin{cases} s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \\ s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{R}{2L} = \frac{800}{2\ 80 \times 10^{-3}} = 5000\ \frac{rad}{s}$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{1}{80 \times 10^{-3}\ 0{,}5 \times 10^{-6}} = 25 \times 10^6\ \frac{rad}{s}$$

Como $\alpha^2 = \omega_0^2$ raíces son reales y coincidentes $s_1 = s_2$

$$s_1 = s_2 = -5000\ \frac{rad}{s}$$

La solución es del tipo: $\boxed{v_C(t) = A_1\, t\, e^{-s_1 t} + A_2\, e^{-s_1 t}}$

A_1 y A_2 se determinan de las condiciones de contorno

$v_C(t=0) = 20V = A_2 \longrightarrow \boxed{A_2 = 20V}$

$i_C\Big|_{t=0} = C\frac{dv_C}{dt}\Big|_{t=0} = i_L(0)$ debe cumplir con la condición de mantener la corriente sobre L

$$i_L(0) = 30\,mA = -C \left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} \leftarrow i_c(0) = -i_L(0)$$

Circula corriente en sentido contrario a la carga del capacitor

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = -s_1 A_2 e^{-s_1 t}\Big|_{t=0} + A_1 e^{-s_1 t}\Big|_{t=0} + A_1 t e^{-s_1 t}(-s_1)\Big|_{t=0}$$

$$\left.\frac{dv_c}{dt}\right|_{t=0} = 5000\,A_2 + A_1$$

$$-30 \times 10^{-3}\,A = 0{,}5 \times 10^{-6}\,F\,(-5000 \quad 20 + A_1)$$

$$-\frac{30 \times 10^{-3}}{0{,}5 \times 10^{-6}} + 10^5 = A_1 \rightarrow \boxed{A_1 = 40000}$$

$$\boxed{v_c(t) = 40000\,t\,e^{-5000t} + 20\,e^{-5000t}} \quad t \geq 0$$

EJEMPLO 2 : Circuito RLC Paralelo

Si $v(0^+) = 12V$, $i_L(0^+) = 30mA$

Calcular $v(t)$ para $t \geq 0$

$i_C(t) + i_L(t) + i_R(t) = 0$ (ley de Kirchhoff) ; $v_C(t) = v(t)$

$$C\frac{dv}{dt} + \frac{v}{R} + \frac{1}{L}\int_0^t v\, d\tau = 0$$

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{R} + \frac{v}{L} = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{CR}\frac{dv}{dt} + \frac{v}{LC} = 0}$$

Solución típica

$$v = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

ec. caract $\quad s^2 + \frac{1}{RC}s + \frac{1}{LC} = 0$

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$
$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$$

$$\alpha = \frac{1}{2RC} \quad , \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\alpha = \frac{1}{2 \; 200 \; 0{,}2\times10^{-6}} = 12500$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{0{,}2\times10^{-6} \; 50\times10^{-3}} = 10^8$$

$\alpha^2 > \omega_0^2$ raíces reales y distintas

$1{,}5625\times10^8 > 10^8$

$$s_1 = -12500 + \sqrt{1{,}5625\times10^8 - 10^8} = -5000$$
$$s_2 = -12500 - \sqrt{1{,}5625\times10^8 - 10^8} = -20000$$

$$\boxed{v(t) = A_1 e^{-5000t} + A_2 e^{-20000t}}$$

$$v(0) = 12V = A_1 + A_2$$

$$i_C(0^+) = C\frac{dv}{dt}\Big|_{t=0} \quad ; \quad i_C(0^+) + i_L(0^+) + i_R(0^+) = 0$$

$$i_C(0^+) = -i_L(0^+) - i_R(0^+)$$

$$i_c(0^+) = -30\,mA - \frac{12V}{0{,}200k\Omega} = -90\,mA$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0} = A_1 s_1 e^{s_1 t}\Big|_{t=0} + A_2 s_2 e^{s_2 t}\Big|_{t=0} = A_1 s_1 + A_2 s_2$$

$$i_c(0^+) = -90\,mA = 0{,}2\times10^{-6}\left[(-A_1\,5000) + A_2(-20000)\right]$$

$$A_1 = 12 - A_2$$

$$\frac{-90\times10^{-3}}{0{,}2\times10^{-6}} + 60\times10^{3} = A_2\,(5000-20000)$$

$$\boxed{A_2 = 26V}$$

$$A_1 = 12-26 = \boxed{-14V}$$

$$\boxed{v(t) = -14V\,e^{-5000t} + 26V\,e^{-20000t}}$$

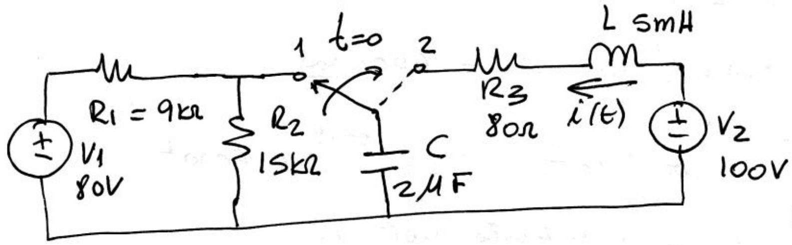
EJEMPLO 3 Respuesta al escalón

La respuesta se calcula como

solución = solución forzada + solución natural

Valor final de la respuesta que depende del circuito

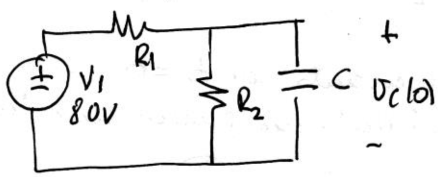
depende de las raíces de la ecuación característica



La llave estuvo en 1 un tiempo muy largo y en t=0 pasa a 2

Calcular $i(t)$ $t \geq 0$

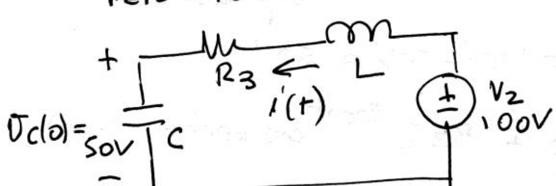
Para $t \leq 0$ el C se carga a una tensión dada por el divisor de tensión $R_1 - R_2$



$$v_C(0) = \frac{V_1 \, R_2}{R_1 + R_2} = 50V$$

Es la tensión inicial en C para t = 0 cuando la llave pasa a 2.

Para $t \geq 0$ el circuito sería:



$$i(t) = I_{final} + i(t)\ \text{(solución de la ec característica)}$$

Solución respuesta natural

Para encontrar la solución natural evaluamos el circuito

$$v_C + v_R + v_L = V_2$$

$$\frac{1}{C}\int i\,dt + iR + L\frac{di}{dt} = V_2$$ si hacemos la derivada de i respecto a t

$$\frac{i}{C} + \frac{di}{dt}R + L\frac{d^2 i}{dt^2} = 0 \rightarrow \boxed{\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0}$$

ecuación característica

$$\alpha = \frac{R}{2L} \qquad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

$$\alpha = \frac{80}{2\ 5\times10^{-3}} = 8000\,\frac{rad}{s} \rightarrow \alpha^2 = 64\times10^6 \left(\frac{rad}{s}\right)^2$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{5\times10^{-3}\ 2\times10^{-6}} = 10^8 \left(\frac{rad}{s}\right)^2 \qquad \alpha^2 < \omega_0^2$$ raíces complejas conjugadas

Solución es del tipo:

$$i(t) = B_1\, e^{-\alpha t} \cos \omega_d t + B_2\, e^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega_d t$$

donde $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = 6000\,\frac{rad}{s}$

$$\boxed{i(t) = B_1\, e^{-8000t} \cos 6000t + B_2\, e^{-8000t} \operatorname{sen} 6000t}$$

Solución de la respuesta natural

En $t=0$ $i(t) = 0 \rightarrow B_1 = 0$

$$\boxed{i(t) = B_2\, e^{-8000t} \operatorname{sen} 6000t}$$

Para calcular B_2 analizamos el circuito en $t=0$ la corriente es cero pero para lograrlo la inductancia genera una tensión

$$v_L = L \left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} \rightarrow V_2 = v_L(0) + \underbrace{v_R(0)}_{=0 \text{ porque } i=0} + \underbrace{v_C(0)}_{50V}$$

$$v_L(0) = 100V - 50V = 50V$$

$$\frac{di}{dt} = B_2\, e^{-8000t}(-8000) \operatorname{sen} 6000t + B_2\, e^{-8000t} \cos 6000t\ (6000)$$

$$\left.\frac{di}{dt}\right|_{t=0} = B_2\, 6000 \rightarrow v_L(0) = 50V = 5\times10^{-3}H\ B_2\, 6000$$

$$B_2 = \frac{50V}{5\times10^{-3}\, 6000} = 1{,}67A$$

$$i(t) = 1{,}67\,A\, e^{-8000t} \operatorname{sen} 6000t$$

$i_t(t) = I_{final} + i(t)$ pero $I_{final} = 0$

$$\boxed{i_t(t) = 1{,}67\,A\, e^{-8000t} \operatorname{sen} 6000t}$$