Teoría de Circuitos

Métodos de resolución de circuitos

Condición: se aplican a redes bilaterales lineales. El término bilateral se refiere a que no habrá cambios en el comportamiento de la respuesta de un elemento de circuito si se invierte la tensión o la corriente a través del mismo.

Terminología:

Nodo: punto de unión entre dos o más componentes

Nodo esencial: nodo donde se unen tres o más componentes

Rama: camino que une dos nodos

Rama esencial: camino que conecta dos nodos esenciales

Camino: recorrido de componentes adyacentes donde cada elemento se recorre una vez

Lazo o **camino cerrado**: camino recorrido partiendo de un nodo y retornando al mismo nodo

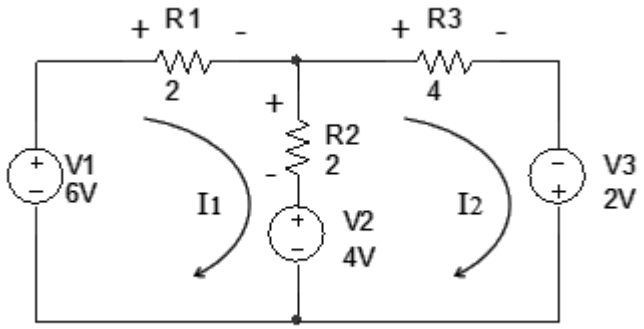
Malla: camino cerrado que no incluye ningún otro lazo

Método de corrientes de malla

Se eligen mallas asignándoles una corriente con sentido arbitrario, denominadas corrientes de malla. Se escriben las ecuaciones de la segunda ley de Kirchhoff para cada malla considerando las intensidades de corrientes de malla como variables desconocidas. Se forma un sistema de ecuaciones linealmente independiente y se resuelve. La corriente resultante es una corriente de malla si la rama por donde circula sólo pertenece a la malla, o es una combinación algebraica de corrientes de malla si la rama por donde circula es común a dos mallas.

Se puede calcular el número de ecuaciones necesarias para resolver el circuito como:

nro. ecuaciones = nro. ramas esenciales – (nro. nodos esenciales – 1)



Para facilitar la resolución, si hay fuentes de corriente reales conviene reemplazarlas por su equivalente de fuente de tensión.

Malla 1: $V_1 – I_1 R_1 – (I_1 – I_2) R_2 - V_2 = 0$

Malla 2: $V_2 + (I_2 – I_1) R_2 – I_2 R_3 + V_3 = 0$

Reacomodando términos:

$(R_1 + R_2) I_1 – (R_2) I_2 = V_1 – V_2$

$– (R_2) I_1 + (R_3 + R_2) I_2 = V_2 + V_3$

$4 I_1 – 2 I_2 = 2$

$– 2 I_1 + 6 I_2 = 6$

Resolviendo el sistema, resulta: $I_1 = 1.2$ A, $I_2 = 1.4$ A.
La corriente por R_2 está dada por $(I_1 – I_2)$.

Generalización del método de corrientes de malla

El sistema de ecuaciones resultante puede escribirse directamente en la siguiente forma para un sistema de n ecuaciones linealmente independientes:

$R_{11} I_1 \pm R_{12} I_2 \pm R_{13} I_3 \ldots \pm R_{1n} I_n = V_{i1}$

$\pm R_{21} I_1 + R_{22} I_2 \pm R_{23} I_3 \ldots \pm R_{2n} I_n = V_{i2}$

$\pm R_{31} I_1 \pm R_{32} I_2 + R_{33} I_3 \ldots \pm R_{3n} I_n = V_{i3}$

…….

$\pm R_{n1} I_1 \pm R_{n2} I_2 + R_{n3} I_3 \ldots + R_{nn} I_n = V_{in}$

Los términos $R_{11}, R_{22}, \ldots, R_{nn}$ que corresponden a la diagonal principal son todos positivos, se denominan resistencias propias de la malla y se calculan como la suma de todas las resistencias que aparecen al recorrer la malla donde circula la corriente I_i.

Los términos $\pm R_{ij}$ corresponden a las resistencias comunes, mutuas o compartidas por las mallas donde circulan las corrientes I_i e I_j. El signo será positivo (+) si las corrientes I_i e I_j tienen el mismo signo. De lo contrario, el signo será negativo (-).

Para circuitos que no contienen fuentes dependientes de tensión o de corriente el sistema es simétrico, de modo que $R_{ij} = R_{ji}$.

Los términos V_{ij} corresponden a la suma algebraica de las fuentes de tensión que aparecen al recorrer cada malla. El signo de V_{ij} será positivo si el sentido de la corriente que produce coincide con el asignado a la corriente de malla. De lo contrario, será negativo.
El sistema puede ser escrito directamente en forma matricial, resultando más cómodo para hallar la solución.

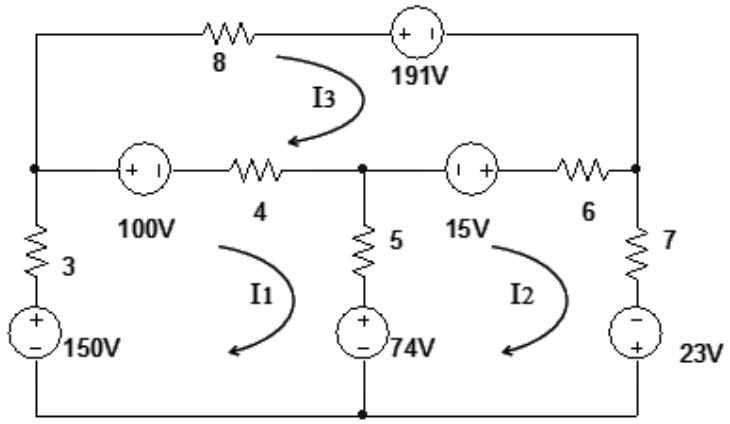
$$\begin{bmatrix} R11 & \cdots & \pm R1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm Rn1 & \cdots & Rnn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ \dots \\ In \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Vi1 \\ Vi2 \\ \dots \\ Vin \end{bmatrix}$$

Forma matricial de la ley de Ohm

Para el ejemplo anterior: $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$

Ejemplo 1

Calcular las corrientes de malla en el circuito.



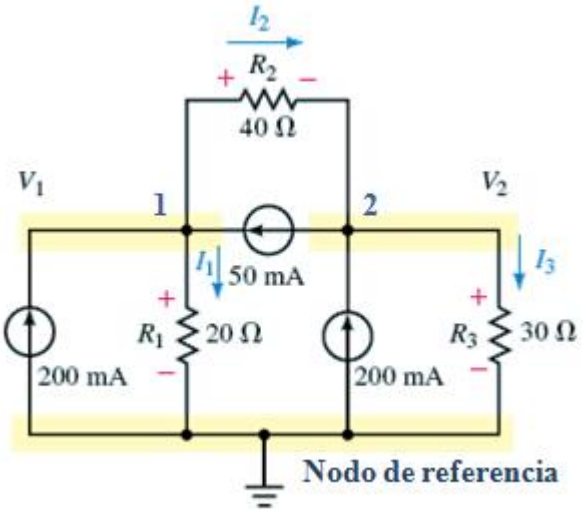
$$\begin{cases} 12\, I_1 - 5\, I_2 - 4\, I_3 = -24 \\ -5\, I_1 + 18\, I_2 - 6\, I_3 = 112 \\ -4\, I_1 - 6\, I_2 + 18\, I_3 = -106 \end{cases}$$

$$I1 = \frac{\begin{vmatrix} -24 & -5 & -4 \\ 112 & 18 & -6 \\ -106 & -6 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}} \qquad I2 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -24 & -4 \\ -5 & 112 & -6 \\ -4 & -106 & 18 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}} \qquad I3 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -5 & -24 \\ -5 & 18 & 112 \\ -4 & -6 & -106 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 12 & -5 & -4 \\ -5 & 18 & -6 \\ -4 & -6 & 18 \end{vmatrix}}$$

Sol: $I_1 = -2$ A, $I_2 = 4$ A, $I_3 = -5$ A

Método de tensiones de nodo

Es un método de resolución de circuitos basado en la primera ley Kirchhoff.
En un sistema de N nodos esenciales se establece un nodo cualquiera como nodo de referencia asignándole un potencial cero (tierra). Los N-1 nodos restantes tendrán un potencial fijo respecto del nodo de referencia. Las ecuaciones que relacionan en estos nodos se escriben aplicando primera ley de Kirchhoff. El número de ecuaciones necesarias será N-1.



$$I1 = \frac{V1}{R1}$$

$$I2 = \frac{V1 - V2}{R2}$$

$$I3 = \frac{V2}{R3}$$

Nodo 1: 200 mA + 50 mA = $I_1 + I_2$

Nodo 2: 200 mA – 50 mA = $- I_2 + I_3$

Se usa como convención que la corriente que entra a un nodo es positiva y si sale del nodo es negativa.
Reemplazando, se obtiene:

$$\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{40}\right) V1 - \left(\frac{1}{40}\right) V2 = 250 \text{ mA}$$

$$-\left(\frac{1}{40}\right) V1 + \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{30}\right) V2 = 150 \text{ mA}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones se obtiene las tensiones de los nodos respecto del nodo de referencia: V_1 = 4.89 V, V_2 = 4.67 V

Para facilitar la resolución, si hay fuentes de tensión reales conviene reemplazarlas por su equivalente de fuente de corriente.

Generalización del método de tensiones de nodo

El sistema de ecuaciones resultante puede escribirse directamente en la siguiente forma para un sistema de n ecuaciones linealmente independientes:

$$G_{11} V_1 - G_{12} V_2 - G_{13} V_3 \ldots - G_{1n} V_n = I_{i1}$$
$$-G_{21} V_1 + G_{22} V_2 - G_{23} V_3 \ldots - G_{2n} V_n = I_{i2}$$
$$-G_{31} V_1 - G_{32} V_2 - G_{33} V_3 \ldots - G_{3n} V_n = I_{i3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$- G_{n1} V_1 - G_{n2} V_2 + G_{n3} V_3 \ldots - G_{nn} V_n = I_{in}$$

V_1, V_2,.., V_n son las incógnitas a determinar, y corresponden a las tensiones entre cada nodo y el nodo de referencia.

Los términos G_{11}, G_{22},…, G_{nn} que corresponden a la diagonal principal son todos positivos, se denominan conductancias propias del nodo y se calculan como la suma de todas las conductancias que concurren al nodo particular considerado. El resto son llamadas conductancias mutuas y corresponden a las conductancias compartidas entre dos nodos. Los términos mutuos contribuyen en forma negativa.

Para circuitos que no contienen fuentes dependientes de tensión o de corriente el sistema es simétrico, de modo que $G_{ij} = G_{ji}$.

Los términos I_{ij} corresponden a la suma algebraica de las fuentes de corriente que concurren o salen del nodo i. El signo de I_{ij} será positivo si entra al nodo y negativo si sale del nodo.

El sistema puede ser escrito directamente en forma matricial, resultando más cómodo para hallar la solución.

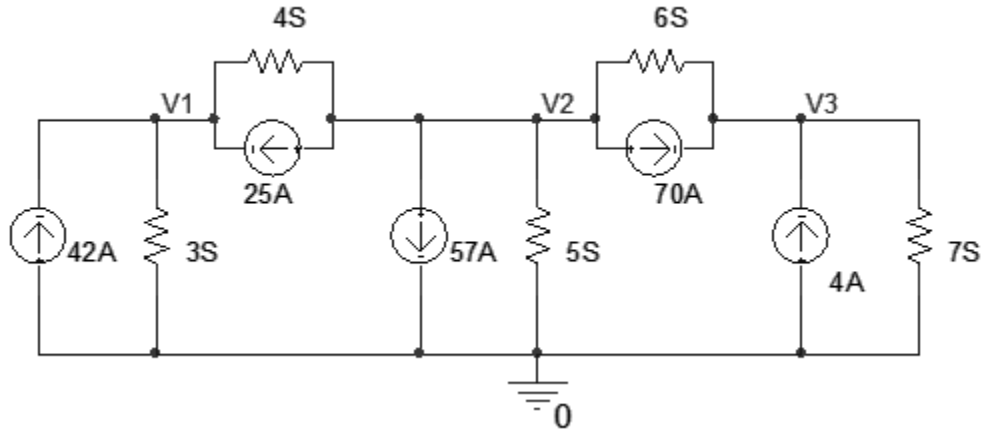
$$\begin{bmatrix} G11 & \cdots & \pm G1n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm Gn1 & \cdots & Gnn \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \\ \ldots \\ Vn \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ii1 \\ Ii2 \\ \ldots \\ Iin \end{bmatrix}$$

Para el ejemplo anterior:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{20}+\frac{1}{40}\right) & -\left(\frac{1}{40}\right) \\ -\left(\frac{1}{40}\right) & \left(\frac{1}{40}+\frac{1}{30}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1 \\ V2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 250 \\ 150 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

Calcular las tensiones en los nodos.



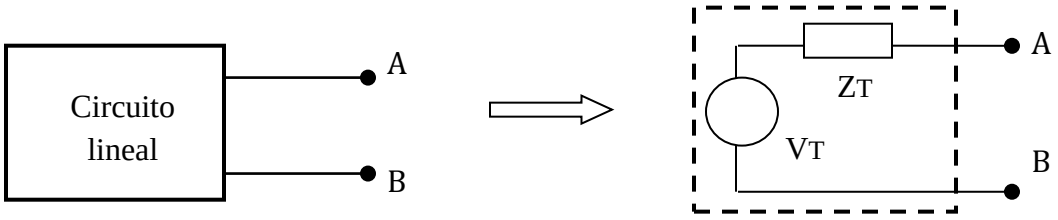
$$7\,V_1 - 4\,V_2 - 0\,V_3 = 67$$
$$-4\,V_1 + 15\,V_2 - 6\,V_3 = -152$$
$$0\,V_1 - 6\,V_2 + 13\,V_3 = 74$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 67 & -4 & 0 \\ -152 & 15 & -6 \\ 74 & -6 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix}} \qquad V_2 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 67 & 0 \\ -4 & -152 & -6 \\ 0 & 74 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix}} \qquad V_3 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 67 \\ -4 & 15 & -152 \\ 0 & -6 & 74 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 \\ -4 & 15 & -6 \\ 0 & -6 & 13 \end{vmatrix}}$$

Sol: $V_1 = 5$ V, $V_2 = -8$ V, $V_3 = 2$ V

Teorema de Thevenin

Cualquier red lineal de dos terminales A y B podrá ser reemplazada por un circuito equivalente formado por una fuente de tensión V_T y una impedancia (o resistencia) en serie Z_T.

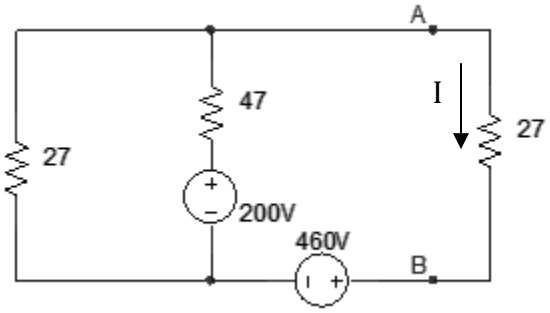


La tensión V_T es la tensión entre los terminales A y B medida en condiciones de circuito abierto. La impedancia Z_T es la impedancia vista desde los terminales A y B y se calcula como la relación entre la tensión a circuito abierto y la corriente de cortocircuito entre esos terminales.

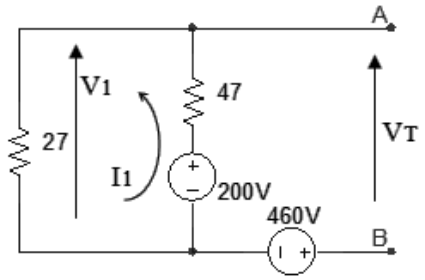
Si en el circuito no hay fuentes de energía dependientes puede calcularse la impedancia Z_T como la vista entre los terminales A y B pasivando las fuentes de energía (cortocircuitando las fuentes de tensión y abriendo las de corriente).

Ejemplo 3

Calcular I aplicando Teorema de Thevenin



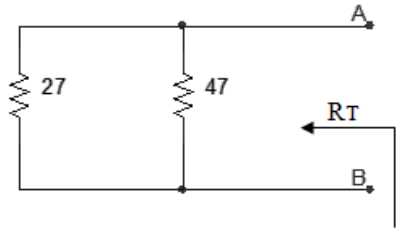
1- Para calcular V_T se abre el circuito entre los terminales A y B. Se calcula la tensión vista entre estos terminales.



$$V_1 = \frac{200\ V}{27 + 47}\ 27 = 72.97\ V$$

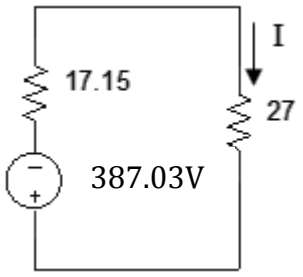
$$V_T = -460\ V + V_1 = -387.03\ V$$

2- Para calcular R_T se pasivan las fuentes de tensión calculando la resistencia vista desde los terminales A y B.



$$R_T = 27\ //\ 47 = 17.15\ \Omega$$

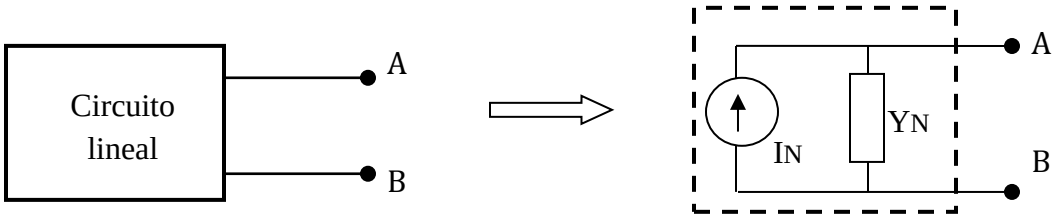
3- Se construye el circuito equivalente y se calcula I



$$I = -\frac{387.03\ V}{44.15\ \Omega} = -8.77\ A$$

Teorema de Norton

Cualquier red lineal de dos terminales A y B podrá ser reemplazada por un circuito equivalente formado por una fuente de corriente I_N y una admitancia (o conductancia) en paralelo Y_N.

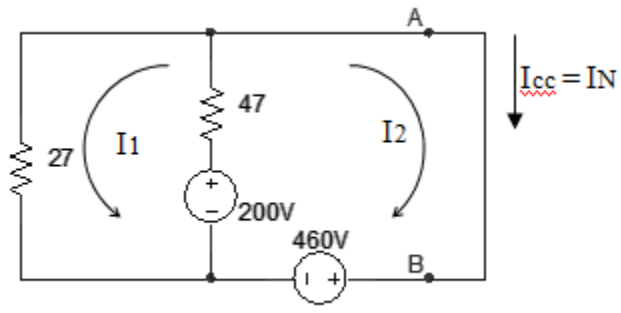


La corriente I_N es la corriente que circula entre los terminales A y B medida en condiciones de cortocircuito.
La admitancia Y_N es la admitancia vista desde los terminales A y B y se calcula como la relación entre la corriente de cortocircuito y la tensión a circuito abierto entre esos terminales.
Si en el circuito no hay fuentes de energía dependientes puede calcularse la admitancia Y_N como la vista entre los terminales A y B pasivando las fuentes de energía (cortocircuitando las fuentes de tensión y abriendo las de corriente).

Ejemplo 4

Calcular I aplicando Teorema de Norton para el circuito del Ejemplo 3

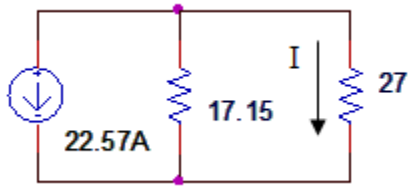
Cortocircuitando los terminales A y B queda el circuito:



$$I2 = \frac{\begin{vmatrix} 74 & 200 \\ 47 & -260 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 74 & 47 \\ 47 & 47 \end{vmatrix}} = -22.57 \text{ A}$$

$$Y_N = \frac{1}{27} + \frac{1}{47} = 0.0583 \text{ S}$$

$$Z_N = \frac{1}{0.0583} = 17.15\ \Omega$$

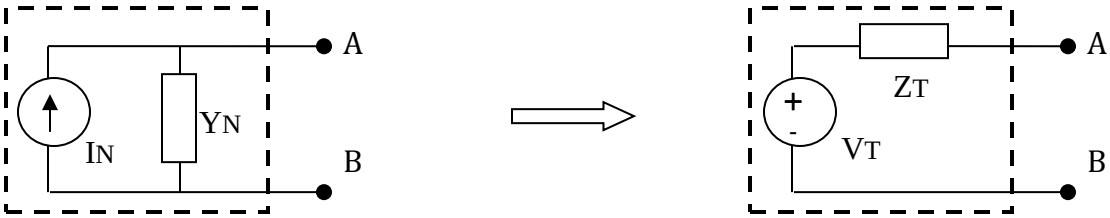


Aplicando regla del divisor de corriente:

$$I = \frac{-22.27}{27 + 17.15}\ 27 = -8.77 \text{ A}$$

Equivalencia entre los teoremas de Thevenin y Norton

Si se realiza una transformación de fuentes puede encontrarse la equivalencia entre los teoremas de Thevenin y Norton.

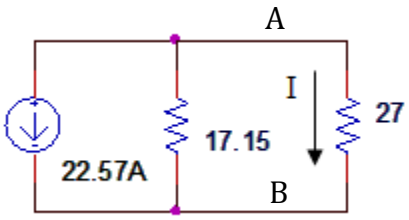


$$V_T = \frac{I_N}{Y_N}$$

$$Z_T = \frac{1}{Y_N}$$

Ejemplo 5

Comprobamos la equivalencia aplicándola al ejemplo anterior.



$$V_T = \frac{I_N}{Y_N} = \frac{-22.75\ A}{0.0583\ S} = -387.1\ V$$

$$Z_T = \frac{1}{Y_N} = 17.15\ \Omega$$