

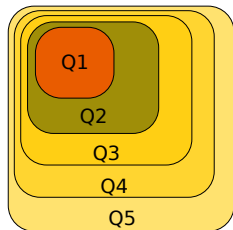
Representación de números reales

Organización de computadoras

Universidad Nacional de Quilmes

<http://orga.blog.unq.edu.ar>

Repaso



- 1 Pila
- 2 Modularización
- 3 Reuso
- 4 Programas y Rutinas
- 5 **Q5**
 - 1 CALL
 - 2 RET

Modularización

Modularizar

Dividir un problema *grande* en problemas mas *pequeños*



Problemón:
Desafío del maxi-kiosco

Problemita 1: **Hacer copia de seguridad de la tabla de precios**

Problemita 2: **Recorrer tabla de ofertas**

Subproblemita: **Aplicar descuento al producto**

Reuso

Reusar

Escribir subrutinas que puedan ser usadas en diferentes situaciones



Problema 1

Subrutina 1

Subrutina 2

Problema 2

Subrutina 1

Subrutina 3

Reuso

Reusar

Escribir subrutinas que puedan ser usadas en diferentes situaciones

Problema 1:

Contar pendientes de
aprobación

Subrutina 1: **aprobar**

Subrutina 2: **contar si $R1=0$**

Problema 2:

Contar aprobados

Subrutina 1 : **aprobar**

Subrutina 3: **contar si $R1=1$**

Para hoy tenemos...

Desafío



Representar partes no enteras de una unidad (números fraccionarios)



¿Cómo lo hacemos?

En el sistema decimal...

Se usa un caracter ", " para separar las unidades de las fracciones



Si la cadena 16 vale: $10+6 = 1*10^1 + 6*10^0$



La cadena 1,6 vale: $1+0,6 = 1*10^0 + 6*10^{-1}$

La coma establece una posición para los pesos de los dígitos

Motivación

La coma establece una posición para los pesos de los dígitos



Pesos				
10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	Valor representado
1	6	,	0	16
	1	,	6	1,6
	0	,	1 6	0,16

Pesos fraccionarios: ¿Cómo se traslada a los binarios?

Pesos				Valor representado
10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	
1	6	,	0	16
	1	,	6	1,6
	0	,	1 6	0,16



Pesos				Valor representado
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	
1	1	,	0	$2^1 + 2^0 = 3$
	1	,	1	$2^0 + 2^{-1} = 1 + 0,5 = 1,5$
	0	,	1 1	$2^{-1} + 2^{-2} = 0,5 + 0,25 = 0,75$

Pero... no podemos escribir la
coma!

Sistema de Punto Fijo

Sistema de punto fijo

Sistema de numeración binario donde se establece una posición fija de la coma fraccionaria.



La coma se asume en un lugar fijo, y no se escribe

Para eso se acuerda un sistema de escritura (y lectura)

Sistema de Punto Fijo

Ejercicio: interpretar

Parte entera		Parte Fraccionaria			
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	Valor
1	0	0	0	0	?
0	1	0	0	0	?
0	0	0	0	1	?
0	1	0	0	1	?
0	0	0	1	0	?

Sistema de Punto Fijo

Notación

BSS(n, m) denota un sistema *Binario Sin Signo* con **n bits en total**, de los cuales m son fraccionarios

Parte entera		Parte Fraccionaria			
2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	Valor



BSS(5,3)

Comparación entre sistemas

Completar la siguiente tabla

Cadena	$BSS(2)$	$BSS(2, 1)$
00		
01		
10		
11		

Comparación entre sistemas

Cadena	$BSS(2)$		$BSS(2, 1)$	
00	0	0	0	0
01	$1 * 2^0$	1	$1 * 2^{-1}$	0,5
10	$1 * 2^1$	2	$1 * 2^0$	1
11	$1 * 2^1 + 1 * 2^0$	3	$1 * 2^0 + 1 * 2^{-1}$	1,5

Comparación entre sistemas

Completar la siguiente tabla

Cadena	$BSS(3)$	$BSS(3, 1)$
000		
001		
010		
011		
100		
101		
110		
111		

Comparación entre sistemas

Cadena	<i>BSS(3)</i>		<i>BSS(3, 1)</i>	
000	0	0	0	0
001	$1 * 2^0$	1	$1 * 2^{-1}$	0,5
010	$1 * 2^1$	2	$1 * 2^0$	1
011	$1 * 2^1 + 1 * 2^0$	3	$1 * 2^0 + 1 * 2^{-1}$	1,5
100	$1 * 2^2$	4	$1 * 2^1$	2
101	$1 * 2^2 + 1 * 2^0$	5	$1 * 2^1 + 1 * 2^{-1}$	2,5
110	$1 * 2^2 + 1 * 2^1$	6	$1 * 2^1 + 1 * 2^0$	3
111	$1 * 2^2 + 1 * 2^1 + 1 * 2^0$	7	$1 * 2^1 + 1 * 2^0 + 1 * 2^{-1}$	3,5

Interpretación en $BSS(n, m)$: dos mecanismos

(A)

Sumar considerando los
pesos fraccionarios

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= 2^0 + 2^{-2} \\ &= 1,25\end{aligned}$$

(B)

Interpretar el número como
en $BSS()$ y dividir por 2^m

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{bss(5,2)}(00101) &= \frac{\mathcal{I}_{bss(5)}(00101)}{4} \\ &= \frac{5}{4} = 1,25\end{aligned}$$

Rango

Rango

Intervalo de números representables

Calcular el rango del sistema $BSS(2, 1)$



Mínimo Interpretar la cadena que representa al mínimo:

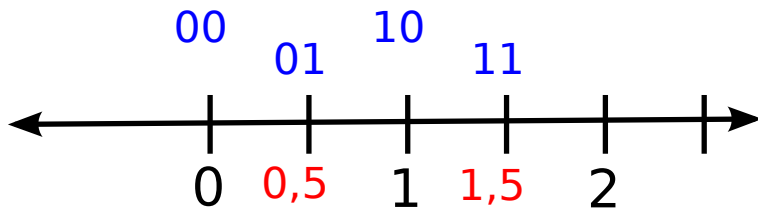
$$\mathcal{I}_{bss(2,1)}(00) = 0$$

Máximo Interpretar la cadena que representa al máximo:

$$\mathcal{I}_{bss(2,1)}(11) = 2^0 + 2^{-1} = 1 + 0,5 = 1,5$$

Rango

Gráficamente



Rango

Calcular el rango del sistema $BSS(2, 0)$

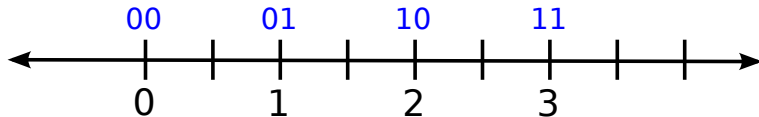


Mínimo Interpretar la cadena que representa al mínimo:

$$\mathcal{I}_{bss(2,0)}(00) = 0$$

Máximo Interpretar la cadena que representa al máximo:

$$\mathcal{I}_{bss(2,0)}(11) = 2^1 + 2^0 = 2 + 1 = 3$$



Rango

Calcular el rango del sistema $BSS(4, 2)$



Mínimo Interpretar la cadena que representa al mínimo:

$$\mathcal{I}_{bss(4,2)}(0000) = 0$$

Máximo Interpretar la cadena que representa al máximo:

$$\mathcal{I}_{bss(4,2)}(1111) = 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = 3 + 0,75 = 3,75$$

Rango

El rango del sistema $BSS(4, 2)$ es $[0 : 3,75]$

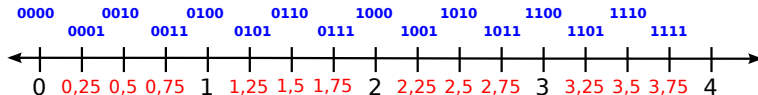


¿Esto implica que pueden representarse todos los números en ese intervalo?

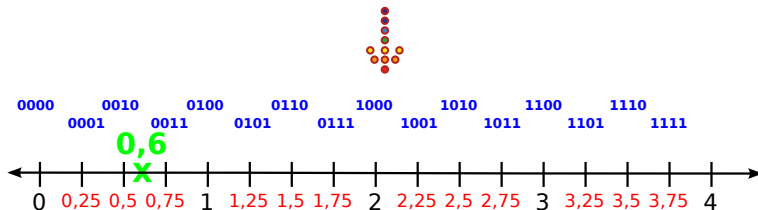


¡NO!

Rango



Por ejemplo: 0,6



No es representable

Resolución

- En los sistemas enteros, los números representados van de uno en uno.
- En el sistema del ejemplo $BSS(2, 1)$, ¿Que distancia tienen?

cadena	número representado
00	0
01	0,5
10	1
11	1,5

Los números van “saltando” de 0,5 en 0,5.

Diremos entonces que la **resolución del sistema** es 0,5.

Resolución

distancia entre dos números representables consecutivos. Nos da una idea de precisión.

Resolución

Ejemplo

En el sistema $BSS(3, 1)$, ¿Que distancia tienen?

cadena	número representado
000	0
001	0,5
010	1
011	1,5
100	2
101	1,5
110	3
110	3,5

Resolución: 0,5

Resolución

Ejemplo

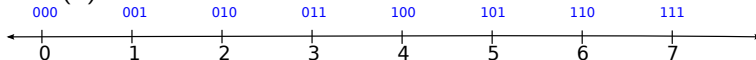
En el sistema $BSS(3, 2)$, ¿Que distancia tienen?

cadena	número representado
000	0
001	0,25
010	0,5
011	0,75
100	1
101	1,25
110	1,5
110	1,75

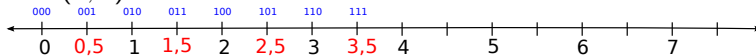
Resolución: 0,25

Resolución

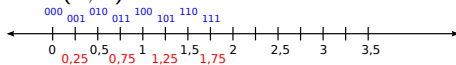
- $BSS(3)$



- $BSS(3, 1)$



- $BSS(3, 2)$



Ejemplos de interpretación BSS en 5 bits:

Ejemplo

Sistema $BSS(5, 2)$

$$00000 \rightarrow 0$$

$$00001 \rightarrow 2^{-2} = 0,25$$

$$00010 \rightarrow 2^{-1} = 0,5$$

$$00011 \rightarrow 2^{-1} + 2^{-2} = 0,75$$

$$00100 \rightarrow 2^0 = 1$$

$$00101 \rightarrow 2^0 + 2^{-2} = 1,25$$

...

$$01111 \rightarrow 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = 3,75$$

$$10000 \rightarrow 2^2 = 4$$

$$10001 \rightarrow 2^2 + 2^{-2} = 4,25$$

$$10010 \rightarrow 2^2 + 2^{-1} = 4,5$$

$$10011 \rightarrow 2^2 + 2^{-1} + 2^{-2} = 4,75$$

...

$$11111 \rightarrow 2^2 + 2^1 + 2^0 + 2^{-1} + 2^{-2} = 7,75$$

Resolución

Calcular la resolución de los sistemas

- $BSS(8, 1)$
- $BSS(6, 4)$
- $BSS(16, 8)$

¿Cómo representar?

Representación en $BSS(n, m)$: dos métodos

(Separando partes)

La parte Entera:  como en $BSS(n - m)$.

La parte Fraccionaria:  con el método de las multiplicaciones sucesivas

(Corriendo la coma)

Correr el punto fraccionario para poder utilizar la representación en $BSS(n)$

Representación en $BSS(n, m)$: dos métodos

(Separando partes)

La parte Entera:  como en $BSS(n - m)$.

La parte Fraccionaria:  con el método de las multiplicaciones sucesivas



Representación en $BSS(n, m)$

(a) Parte Entera: $\cdots BSS(n)$.

(b) Parte Fraccionaria:

- 1 Multiplicar la parte fraccionaria por 2
- 2 Reservar la parte entera del resultado
- 3 Si ya hicimos $m+1$ multiplicaciones, redondear, sino volver al paso 1
- 4 **Redondeo:** sumar el bit obtenido en el último paso a la cadena completa.

Ejemplo

Representar $X = 3,14$ en $BSS(7, 4)$

● Parte entera: $\mathcal{R}_{bss(3)}(3) = 011$

● Parte Fraccionaria:

$$0,14 * 2 = 0,28$$

$$0,28 * 2 = 0,56$$

$$0,56 * 2 = 1,12$$

$$0,12 * 2 = 0,24$$

$$0,24 * 2 = 0,48$$

$$\begin{array}{r} \text{Redondeo:} \quad + \quad \begin{array}{r} 0110010 \\ 0000000 \\ \hline 0110010 \end{array} \end{array}$$

Representación en $BSS(n, m)$: dos métodos



(Corriendo la coma)

Correr el punto
fraccionario para poder
utilizar la representación
en $BSS(n)$

Representación en $BSS(n, m)$: Corriendo la coma

Correr el punto fraccionario para poder utilizar la representación en $BSS(n)$

- 1 Multiplicar al número X que se quiere representar por 2^m
- 2 Redondear el número obtenido (X') al entero más cercano (X'').
- 3 Representar X'' en $BSS(n)$.

Ejemplo

Representar $X = 3,14$ en $BSS(7, 4)$

- 1 Multiplicar al número X que se quiere representar por 2^m
- 2 Redondear el número obtenido (X') al entero más cercano (X'').
- 3 Representar X' en $BSS(n)$.

- $X * 2^4 = 50, 24 = X'$
- Redondeo: $X' \approx 50 = X''$
- $\mathcal{R}_{bss(7)}(50) = 0110010$

Ejemplo

Representar $X = 6,625$ en $BSS(8, 4)$

- 1 Multiplicar al número X que se quiere representar por 2^m
- 2 Redondear el número obtenido (X') al entero más cercano (X'').
- 3 Representar X'' en $BSS(n)$.

- $X * 2^4 = 106 = X'$
- Redondeo: $X' \approx 106 = X''$
- $\mathcal{R}_{bss(8)}(106) = 01101010$

¿Como controlar el resultado obtenido?



¡Interpretando!

Representación de 3,14 en $BSS(7, 4)$ es 0110010



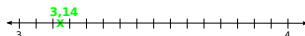
$$\mathcal{I}_{bss(7,4)}(0110010) = 2^1 + 2^0 + 2^{-3} = 3,125 \quad \times$$



¿Porqué no obtuvimos 3,14?



¡No es representable!



Aproximación

Si 3,14 no es representable, se obtiene una aproximación



$$3,125 \approx 3,14$$

Error por aproximación

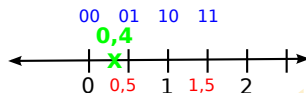
Ejercicio: representar 0,4 en $BSS(2, 1)$

- $X = 0,4$ m = 1
- $X' = 0,4 \times 2^1 = 0,8$
- $\mathcal{R}_{bss(3)}(1) = 001$



Comprobar el resultado

$$\mathcal{I}_{bss(2,1)}(001) = 2^{-1} = 0,5$$



¡Herrar es humano!

Error Absoluto

Error Absoluto

Valor absoluto de la diferencia entre el número que se quiere representar y el número representado.

$$EA(X) = |X - E|$$

donde E es el valor de la Representación más próxima a X.

- En este caso $EA(0,4) = |0,4 - 0,5| = 0,1$.

Error Absoluto

- El error absoluto de un **número representable** es 0 ya que no hay diferencia entre el número que se quiere representar y su Representación.
- Notar que el Error Absoluto tiene como cota máxima la mitad de la resolución:

$$(\forall X \in \text{rango}) 0 \leq EA(X) \leq R/2$$

Error Relativo

Ejemplo

Representar el número 14,9 en $BSS(8, 4)$:

- 1 $X = 14,9$ $m = 4$
- 2 $X' = 14,9 \times 2^4 = 238,4$
- 3 $\mathcal{R}_{bss(8)}(238) = 11101110$
- 4 $\mathcal{I}_{bss(8,4)}(11101110) = 14,875$

$$EA(14, 9) = |14,9 - 14,875| = 0,025$$

El error cometido al representar 14,9 es el mismo que al representar 3,9. Sin embargo el valor del error 0,025 es “más importante” al representar 3,9 que al representar 14,9.

Error Relativo

Error Relativo

$$ER(X) = \left| \frac{EA(X)}{X} \right| (\forall X \neq 0 \in \text{rango})$$

$$ER(3,9) = \left| \frac{EA(3,9)}{3,9} \right| = |0,025/3,9| \approx 0,0064 = 0,64 \%$$

$$ER(14,9) = \left| \frac{EA(14,9)}{14,9} \right| = |0,025/14,9| \approx 0,0016 = 0,16 \%$$

El error relativo al representar 14,9 es menor que el error relativo al representar 3,9

Error Absoluto y Relativo

Calcular error absoluto en $BSS(8, 4)$

- 1,1
- 2,125
- 3,099
- 4,75
- 19,99

Error Absoluto y Relativo

Calcular error relativo en $BSS(8, 4)$

- 0,1
- 15,1

Error Relativo

- El error relativo más grande se produce al representar números muy cercanos a cero, para los cuales el sistema los representa como 0. Para estos números, $EA(X) = X$, y $ER(X) = 1 = 100\%$.
- Los errores relativos más pequeños se producen en el extremo superior del rango.

Bonus Track: trabajo en máquina



Trabajo Práctico

- Escribir un programa que implemente el algoritmo de monocromatización por máxima componente



- Probar el programa con un conjunto dado de imágenes

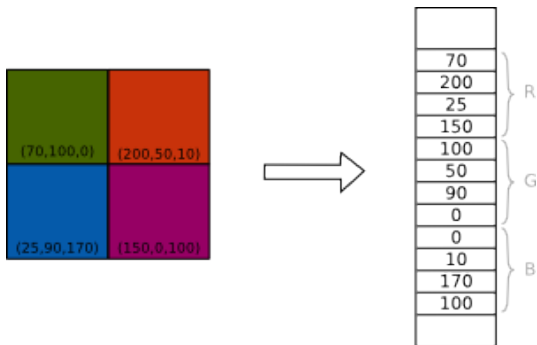
Trabajo Práctico

- Se debe hacer en la arquitectura x86 (comercial)
- Las imágenes deben estar en formato .bmp
 - La imagen BMP es una matriz de píxeles
 - Cada pixel es una terna (RGB)
 - Cada valor R, G o B pertenece al intervalo $[0,255]$  ocupa un byte



Trabajo Práctico

La matriz se representa en memoria como un arreglo



Trabajo Práctico

Toda esta información en un



(en el blog)

¡Demostración!

¿Preguntas?