Lógica Digital

Organización de computadoras 2014

Universidad Nacional de Quilmes

Introducción: Cálculo Proposicional

El cálculo proposicional es el estudio de las relaciones lógicas entre objetos llamados proposiciones, que generalmente pueden interpretarse como afirmaciones que tienen algún significado en contextos de la vida real. Para nosotros, una proposición será cualquier frase que pueda ser verdadera o falsa.

- *Está lloviendo* es una proposición
- *¿Cómo te sentís hoy?* no es una proposición
- *El mar y el sónido de las olas* no es una proposición
- *Yo estudio organización de computadoras* es una proposición

En el cálculo proposicional se utilizan letras minúsculas (ej: p, q, r) para simbolizar proposiciones, que se pueden combinar utilizando conectivos lógicos:

1. ¬ para "no" o negación
2. $^\wedge$ Para "y"
3. $^\vee$ para "o"
4. ⇒ para implicación condicional

Veamos el siguiente ejemplo con las proposiciones p, q y r definidas de la siguiente manera:

- p = "está lloviendo"
- q = "el sol está brillando"
- r = "hay nubes en el cielo"

Simbolizamos las siguientes frases:

1. Está lloviendo y el sol está brillando: $p^\wedge q$
2. Si está lloviendo, entonces hay nubes en el cielo $p \Rightarrow r$
3. Si no está lloviendo, entonces el sol no está brillando y hay nubes en el cielo $\neg p \Rightarrow (\neg q^\wedge r)$

La suposición fundamental del cálculo proposicional consiste en que los valores de verdad de una proposición construida a partir de otras proposiciones quedan completamente determinados por los valores de verdad de las proposiciones originales. Para ello se establecen los valores de verdad según las posibles combinaciones de valores de verdad de las proposiciones originales, basándonos en las siguientes tablas, considerar 0 como Falso y 1 como verdadero:

A	B	$A^\wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La tabla indica que, el conectivo lógico "y" sólo será verdadero cuando ambas proposiciones p y q sean verdaderas.

A	B	$A^\vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

La tabla indica que, si al menos una de las proposiciones es verdadera, la proposición formada por el conectivo "o" será verdadera.

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

Evidentemente, si la proposición p es verdadera, su negación será falsa y viceversa.

Relacionemos este tema con la Informática:

Desde hace mucho tiempo, el hombre en su vida diaria se expresa, comunica,almacena información, la manipula, etc. mediante letras y números. Para la representación numérica utiliza el sistema de representación decimal, en tanto que, dependiendo del idioma, dispone de un alfabeto que representa estas letras. Siguiendo el mismo principio que guía al hombre, las computadoras tienen su propio sistema de representación. Debido a su construcción basada fundamentalmente en circuitos electrónicos digitales, utiliza un sistema binario. Esto obliga a transformar la representación de nuestra información, tanto numérica como alfanumérica, a una representación binaria para que la máquina sea capaz de procesarlos.

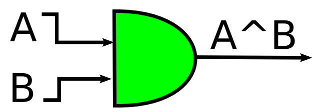
Por cuestiones de índole técnica, los circuitos electrónicos que conforman una computadora suelen estar capacitados para reconocer señales eléctricas de tipo digital; por lo tanto, se hace necesario que los métodos de codificación internos tengan su origen en el sistema binario, y con ellos se pueda representar todo tipo de informaciones y órdenes que sean manejadas por la computadora. En los circuitos electrónicos suele representarse la presencia de tensión (electricidad) en un punto de un circuito por medio de un 1, en tanto que 0 representa la ausencia de dicha tensión.

En consecuencia utilizaremos lógica proposicional para resolver problemas y lógica digital para automatizar soluciones de problemas.

La electrónica digital está fundamentada en la base matemática formada por el álgebra de Boole (George Boole, matemático inglés, 1815 -1864). Este método de análisis considera que todos los elementos poseen únicamente dos estados (biestables) o dos valores, verdadero o falso (1 ó 0) que son opuestos entre sí, no permitiéndose nunca la adopción de estados intermedios. Estudiando las distintas asociaciones entre ellos se obtienen las leyes generales sobre los procesos lógicos. Fue Claude Shannon (matemático e ingeniero norteamericano, 1916 -2001) quien aplicó estas técnicas de estudio, a los circuitos compuestos de elementos que solo pueden adoptar dos estados estables posibles, apareciendo entonces los llamados circuitos lógicos. Puede decirse entonces que el álgebra de Boole es el sistema matemático empleado en el diseño de circuitos lógicos, que nos permite identificar mediante símbolos el objeto de un circuito lógico de modo que su estado sea equivalente a un circuito real.

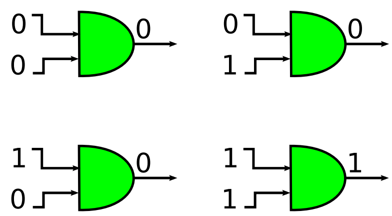
Existe un convenio gráfico para representar dispositivos (electrónicos, hidráulicos, mecánicos, etc.) que lleven a cabo funciones booleanas elementales y que, en función de la combinación o combinaciones diseñadas, se obtendrán funciones más complejas. Las compuertas lógicas son dispositivos los electrónicos que desarrollan las funciones booleanas

Conjunción - AND

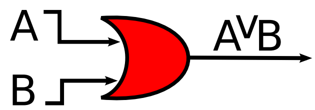


Una compuerta AND tiene dos entradas como mínimo y su operación lógica es un producto entre ambas, no es un producto aritmético, aunque en este caso coincidan. *Observa que su salida será 1 si sus dos entradas están a nivel alto (1)*

Casos:

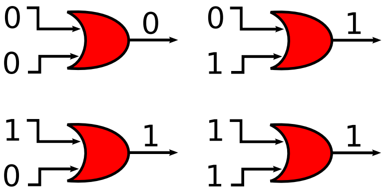


Disyunción: OR

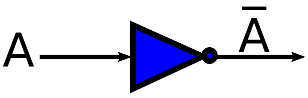


Al igual que la anterior posee dos entradas como mínimo y la operación lógica, será una suma entre ambas. Bueno, todo va bien hasta que $1 + 1 = 1$, el tema es que se trata de una compuerta O Inclusiva es como a y/o b. *Es decir, basta que una de ellas sea 1 para que su salida sea también 1*

Casos:

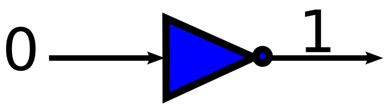


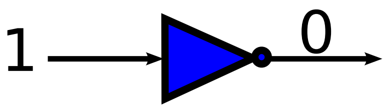
Negación: NOT



Se trata de un inversor, es decir, invierte el dato de entrada, por ejemplo; si se pone su entrada a 1 (nivel alto) se obtiene en su salida un 0 (o nivel bajo), y viceversa. Esta compuerta dispone de una sola entrada. *Su operación lógica es s igual a a invertida*

Casos:

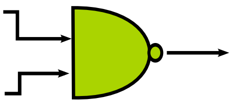




Operaciones lógicas adicionales

1. Compuerta **NAND**

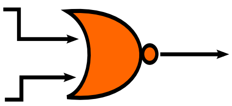
$$a \uparrow b = \overline{a^\wedge b}$$



Responde a la inversión del producto lógico de sus entradas, en su representación simbólica se reemplaza la compuerta NOT por un círculo a la salida de la compuerta AND.

2. Compuerta **NOR**

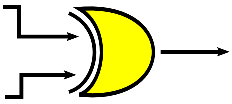
$$a \downarrow b = \overline{a^\vee b}$$



El resultado que se obtiene a la salida de esta compuerta resulta de la inversión de la operación lógica o inclusiva es como un no a y/o b. Igual que antes, solo agregas un círculo a la compuerta OR y ya tienes una NOR.

3. Compuerta **XOR**

$$a \oplus b = (\overline{a}{}^\wedge b)^\vee(a^\wedge \overline{b})$$



Es OR EXclusiva en este caso con dos entradas (puede tener más) y lo que hará con ellas será una suma lógica entre a por b invertida y a invertida por b.*Al ser O Exclusiva su salida será 1 si una y sólo una de sus entradas es 1*

Actividad

1. Dibuja el circuito lógico para la siguiente fórmula $(A^\wedge B)$

2. Dibuja el circuito lógico para la siguiente fórmula $((A^\wedge B)^\vee(\neg A^\wedge c))$

3. ¿Podrias armar la tabla de verdad correspondiente al item anterior?