Programación entera

Los problemas de P.E. son aquellos donde las incógnitas del problema deben ser valores enteros: en los ejercicios de la práctica 2 muchos enunciados corresponden a este tipo de problemas:
por ejemplo el ejercicio 5 que dice :
Un fabricante de muebles desea determinar cuántas mesas, sillas, escritorios y armarios deberá fabricar , etc ….
Es evidente que si las incógnitas del problema son x_1= cantidad de sillas ; x_2= cantidad de mesas; x_3 = cantidad de escritorios ; x_4= cantidad armarios. Ninguna de esta variables pueden ser números fraccionarios.

Los problemas de programación entera pueden ser:

programación entera binaria, donde las incógnitas del problema pueden tomar como única solución el valor 0 ó 1.

programación entera pura , donde las incógnitas del problema deben tener como resultado valores positivos enteros.

programación entera mixta , donde algunas incógnitas deben ser enteras positivas y otras no requieren de esta condición

Problema de programación entera binaria:

Entre los problemas de este tipo encontramos aquellos donde las incógnitas son variables de decisión y por eso pueden tomar exclusivamente el valor 0 ó 1.
Ejemplo. El problema de la mochila.
Se consideran n objetos. Cada objeto j tiene fijado un peso a_j y un valor c_j , j = 1, . . . , n. El peso de la mochila está limitado a P. Se debe decidir qué objetos introducir en la mochila para maximizar su valor.

$$x_j = \begin{cases} 1 \text{ si el objeto j es introducido en la mochila.} \\ 0 \text{ si el objeto j no es introducido en la mochila.} \end{cases}$$

Modelo lineal.

$$\max z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n$$

sujeto a

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \leq P$$
$$x_j = 0, 1 , j = 1, \ldots , n$$

Ejemplo. Problema de la mochila.
Tengo 4 productos que puedo guardar en la mochila. Cada uno tiene asociado un valor y tiene un cierto peso que se indica en la tabla:

	A	B	C	D
valor	15	25	12	10
peso	3	6	5	5

En la mochila no puedo introducir un peso que supere 12

$$\max z = 15x_1 + 25x_2 + 12x_3 + 10x_4$$

sujeto a

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 5x_4 \leq 12$$
$$x_j = \text{binaria para } j = 1, 2, 3, 4$$

TECNICAS DE RAMIFICACION Y ACOTAMIENTOS

Cualquier problema de P.E pura tiene un nº finito de soluciones posibles .La técnica de ramificación y acotamiento se apoya en la técnica de "divide y vencerás".
Como es demasiado complicado resolver directamente el problema original,se "divide "en subproblemas cada vez + pequeños hasta que estos se pueden vencer.
La división (ramificación) es una partición del conjunto completo de soluciones factibles en subconjuntos mas pequeños .Después se hace un sondeo(eliminación de la rama) que es :

- 1er acotando la mejor solución en el subconjunto.
- 2do descartando los subconjuntos cuya cota indique que no es posible que contenga una solución óptima para el problema original.

Veamos el procedimiento paso por paso en el ejemplo de la mochila.

RAMIFICACION

Como se trata de variables binarias el problema es mas sencillo se parte de un conjunto de soluciones factibles para 1 variable (Por ejemplo X1=0, X1=1) así el problema queda dividido en dos problemas mas pequeños

SUB PROBLEMA 1 $X_1=0$

SUB PROBLEMA 2 $X_1=1$

Todo
X=(4;0;0;0)
Z= 60

SUB1 x1=0
max z= 25 x2+12 x3+10 x4
sujeto a: 6x2 + 5x3 + 5x4 ≤ 12
X=(0;2;0;0)
Z= 50 Z=50 es mayor que Z*=40 entonces se debe continuar la ramificacion

SUB2 x1=1
max z= 15 +25 x2+12 x3+10 x4
sujeto a: 6x2 + 5x3 + 5x4 ≤ 9
X=(1;1/2;0;0)
Z=52,5
Z=52,5 es mayor que Z=50

SUB3 x1=1, x2=0
max z= 15 +12 x3+10 x4
sujeto a: 5x3 + 5x4 ≤ 9
X=(1;0;1,8;0)
Z=36,8

SUB4 x1=1, x2=1
max z= 40 +12 x3+10 x4
sujeto a: 5x3 + 5x4 ≤ 3
X=(1;1;0,6;0)
Z= 47,2
Z=47,2 es mayor Z=36,8

SUB5 x1=1, x2=1, x3=0
max z= 40 +10 x4
sujeto a: 5x4 ≤ 3
X= (1;1;0;0,6)
Z= 46

SUB6 x1=1, x2=1, x3=1
max z= 52 +10 x4
sujeto a: 5x4 ≤ -2 (sin sol)

El subproblema 5 se puede dividir en:

SUB7 x1=1, x2=1, x3=0; x4=0 entonces Z= 40 X=(1;1;0;0)
5x3 + 5x4 ≤ 3 resulta 0 ≤ 3
Hemos encontrado el primer Z* (Z incumbente)

SUB8 x1=1, x2=1, x3=0; x4=1 entonces Z =50
5x3 + 5x4 ≤ 3 pero no cumple la restricción ;(sin sol)

En la primer ramificación nos quedó sin continuar la rama donde Z=50 para X=(0;2;0;0).
Como 50 > 40 (Z* del último paso) se debe continuar por esa rama.

SUB1 x1=0

SUB1 x1=0
max z= 25 x2+12 x3+10 x4
sujeto a: 6x2 + 5x3 + 5x4 ≤ 12
X=(0;2;0;0)
Z= 50

SUB 9 x1=0, x2=0
max z= 12 x3+10 x4
sujeto a: 5x3 + 5x4 ≤ 12
X=(0;0;2,4;0)
<u>Z= 28,8 inferior a z*=40</u>

UB 10 x1=0, x2=1
max z= 25 + 12 x3+10 x4
sujeto a: 5x3 + 5x4 ≤ 6
X=(0;1;1,2;0)
<u>Z= 39,4 inferior a z*=40</u>

En estas dos nuevas ramificaciones los valores de Z son inferiores al Z* =40 (Z incumbente) es por esa razón que no se continúan pues no se podrán encontrar valores de Z que superen su propia cota.

Esta es la ramificación en subproblemas (división) mediante un árbol con ramas “arcos” desde el nodo inicial “todos” a dos nodos correspondientes a los 2 subproblemas. Este árbol que hará crecer sus ramas en cada iteración se conoce como “árbol de soluciones “(o árbol de enumeración) para el algoritmo, las variables que se usan para la ramificación en una iteración se conocen como “variables de ramificación”

Es necesario obtener para cada subproblema una “cota”.
La forma mas común es resolver una soltura de P.L. haciendo un simplex en cada subproblema (o utilizando otro método informático o cuando es posible el método gráfico)

En nuestro ejemplo :
El problema completo (corresponde al nodo “todos”) la soltura de P.L. nos da como resultado del simplex
Z=60 X =(4 , 0 , 0 , 0)
Entonces la mejor solución que puede hallarse como óptima del problema de P.E binaria será un valor de Z < 60.
Si con la amplitud de que las variables pueden tomar cualquier valor real el máximo de Z es 60 , cuando busquemos con las mismas restricciones aquellas que también deben ser enteras no podrán mejorar este óptimo.

podemos decir que la cota para todo el problema será Z = 60 (cota para todo el problema)
Ahora se obtendrá de la misma manera la cota para los 2 subproblemas . Sus “solturas de P.L.” (sacando en ambos casos la condición X_2, X_3, X_4 binario) son
X=(0; 2 ;0;0) Z= 50 para el SUBP1 y
X=(1;1/2;0;0) Z= 52,5 para el SUBP2.
La cota del SUBP1 es 50
La cota del SUBP1 es 52 pues al ser enteras los valores no podrán superar a 52.

<u>SONDEAR</u>

Un problema se puede “sondear “(vencer), y por lo tanto no tomarse en cuenta en algunas de estas 3 formas .

a) Si al resolver el simplex de un subproblema resulta que obtenemos una solución entera binaria, esta solución debe almacenarse como la **1er solución incumbente o de apoyo** (la primer solución factible que se ha encontrado hasta ahora para el problema completo) este valor se denota como Z* . Luego por esta rama no se debe continuar pues se halló un Z solución óptima que es entera binaria . Esto es SONDEAR (vencer o no continuar por esta rama) pues no hay razón para seguir teniendo en cuenta este problema y ramificando pues hacerlo conducirá a otras soluciones factibles pero con Z inferiores a la de apoyo o incumbente.

b) Esto sugiere una segunda prueba de sondeo importante cuando se obtiene un Z* no existe razón alguna para tomar en cuenta ningún subproblema cuya cota < Z*, pues no serán mejores que la incumbente. Es decir un subproblema se "sondea" (elimina) siempre que cota <Z*
   IMPORTANTE: No es que se para la ramificación cuando aparece el primer Z* (es decir el simplex me da una solución óptima que ademas es entera), este Z* me permite compara la cota del subproblema con ese valor para decidir si continúo o NO. Si en un subproblema una cota es mayor que Z* se debe continuar.
c) La 3 prueba es bastante directa es cuando el problema de soltura de P.L. no tiene soluciones factibles, entonces el Problema de P.E. tampoco tendrá soluciones factibles y puede "sondearse".

RESUMEN DE LAS PRUEBAS DE SONDEO

PRUEBA 1 Su cota <Z*

PRUEBA 2 La soltura de P.L. no tiene soluciones factibles

PRUEBA 3 La solución óptima para su "soltura de P.L." es entera (sí esta solución es mejor que la de apoyo se convierte en la nueva de apoyo y se aplica la prueba 1 a todos los subproblemas no Sondeados , con la nueva Z* mejorada)