DISTINTAS SOLUCIONES POSIBLES EN EL SIMPLEX

INFINITAS SOLUCIONES DETERMINADAS

FUNCIÓN OBJETIVO PARALELA AL LADO DONDE SE ENCUENTRAN LAS SOLUCIONES ÓPTIMAS

$$\begin{cases} X1 \leq 6 \\ X1 + X2 \leq 8 \\ X1 + 2\,X2 \leq 12 \end{cases}$$

Z(máx) = 4 X1 + 4 X2

$$\begin{cases} X1 + X3 = 6 \\ X1 + X2 + X4 = 8 \\ X1 + 2\,X2 + X5 = 12 \end{cases}$$

			C1	C2	C3	C4	C5		
			4	4	0	0	0		
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	θ	
0	x3	6	1	0	1	0	0	6	menor θ positivo
0	x4	8	1	1	0	1	0	8	
0	x5	12	1	2	0	0	1	12	
	Z_j	0	0	0	0	0	0		X=(0,0,6,8,12)
	$Z_j - C_j$		-4	-4	0	0	0		Z= 0

Comenzamos con la tabla inicial en el origen (Punto "A"). Ante los Zj- Cj iguales, elegimos X1 para simplificar los cálculos (X2 sería igualmente válido). Luego, iterando sucesivamente arribamos a los puntos B y C.

			C1	C2	C3	C4	C5		
			4	4	0	0	0		
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	θ	
4	x1	6	1	0	1	0	0	--	
0	x4	2	0	1	-1	1	0	2	menor θ positivo
0	x5	6	0	2	-1	0	1	3	
	Z_j	24	4	0	4	0	0		X=(6,0,0,2,6)
	$Z_j - C_j$		0	-4	4	0	0		Z= 24

			C1	C2	C3	C4	C5		
			4	4	0	0	0		
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	θ	
4	x1	6	1	0	1	0	0	6/1=6	
4	x2	2	0	1	-1	1	0	---	
0	x5	2	0	0	1	-2	1	2/1=2	
	Z_j	32	4	4	0	4	0		X=(6,2,0,0,2)
	$Z_j - C_j$		0	0	0^*	4	0		Z= 32

Aquí se presenta una particularidad: El Zj-Cj correspondiente a X3 es cero, y X3 no está en la base. Para analizar el resultado, debemos recordar que Zj-Cj indica en cuánto modifica valor del funcional por cada unidad de esa variable que ingresa en la solución. Entonces, si la variable con Zj-Cj =0 entrara a la base (en este caso x3), el funcional en la próxima tabla sería igual al actual. Esto quiere decir que hay otro vértice del poliedro en el cual el valor del funcional es igual a 32 . Este nuevo vértice está en un punto distinto del poliedro, ya que el valor de tita, si seleccionamos esa variable para ingresar, es distinto de cero. En efecto, si iteramos a la tabla siguiente, llegamos al punto D. Esta iteración tiene sentido si no hay ningún otro Zj-Cj que sea negativo (o positivo en una minimización). Si hubiera otro, se debe tomar éste y no considerar el cero (ver el ejemplo que se da más adelante).

			C1	C2	C3	C4	C5	
			4	4	0	0	0	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	θ
4	x1	4	1	0	0	2	-1	
4	x2	4	0	1	0	-1	1	
0	x3	2	0	0	1	-2	1	
	Z_j	32	4	4	0	4	0	
	Z_j -C_j		0	0	0	4	0	

X=(4,4,2,0,0)
Z= 32

En esta nueva solución, arribamos al mismo valor del funcional(32),pero con distintos valores para las variables. Si quisiéramos seguir iterando, la única variable que puede entrar es X5, y para ello debería salir X3, con lo cual volveríamos a la tabla anterior.

En una tabla óptima de simplex se reconoce una solución alternativa del tipo *infinitas soluciones determinadas* porque una de las variables no está en la base tiene un Zj-Cj igual a cero.

Si miramos el gráfico, observaremos que la recta que pasa por ambos vértices, es paralela a la traza del funcional. Esto quiere decir que cualquier punto ubicado sobre dicha recta, tendrá el mismo valor para el funcional.
Dado que la recta es la que indica X4=0, es lógico que X4 sea la única variable con valor cero en ambas tablas. Además, en el planteo inicial, vemos que los coeficientes de X1 y X2 en la inecuación asociada a dicha recta ($X1 + X2 \leq 8$) son directamente proporcionales a los coeficientes del funcional ($4 X1 + 4 X2$).

Propuesta: Resolver el siguiente problema:

$$\begin{cases} 4 X1 + 2 X2 \geq 8 \\ X1 - X2 \leq 3 \\ - X1 + 3 X2 \leq 9 \end{cases}$$
$$Z(máx) = 6 X1 + 3 X2$$

En el ejemplo, es interesar observar un caso en el que hay un punto alternativo con el mismo funcional, es decir un Zj-Cj=0 en una columna que no es la de la base canónica, pero en ese mismo paso hay un Zj-Cj negativo entonces es la variable correspondiente a esa columna la que debe ingresar y al efectuar la nueva iteración nos encontramos que esta situación se supera. Por ese motivo es importante entender el concepto que está resaltado que dice : en la **tabla óptima del simplex....**

INFINITAS SOLUCIONES INDETRERMINADAS
POLIEDRO ABIERTO

$$\begin{cases} X2 \geq 2 \\ 4\,X1 + 6\,X2 \geq 24 \\ 10\,X1 - 30\,X2 \geq 30 \end{cases}$$

Z(máx) = X1 + 8 X2

$$\begin{cases} X2 - X3 + \mu 1 = 2 \\ 4\,X1 + 6\,X2 - X4 + \mu 2 = 24 \\ 10\,X1 - 30\,X2 - X5 + \mu 3 = 30 \end{cases}$$

Z(máx) = X1 + 8 X2 + 0 X3 + 0 X4 + 0 X5 - M μ1 -M μ2 -M μ3

			C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	
			1	8	0	0	0	-M	-M	-M	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	μ1	μ2	μ3	θ
-M	μ1	2	0	1	-1	0	0	1	0	0	---
-M	μ2	24	4	6	0	-1	0	0	1	0	24/4=6
-M	μ3	30	10	-30	0	0	-1	0	0	1	30/10=3 menor θ positivo
Z_j		-56M	-14M	23M	M	M	M	-M	-M	-M	X=(0,0,0,0,0,2,24,30)
Z_j -C_j			-14M-1	23M-8	M	M	M	0	0	0	Z= -56M

Como ya hemos visto anteriormente, las variables artificiales que salen de la base, van a quedar con Zj-Cj que valdrá M más o menos un número. Pero como M es más grande que cualquier otro número, estas variables nunca volverán a entrar a la base (su Zj-Cj será siempre positivo). Entonces, y como sólo fueron introducidas al problema para poder armar la base canónica (su valor no representa nada), podemos eliminar su columna de la tabla. (Una vez que salieron de la base).

			C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	
			1	8	0	0	0	-M	-M		
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	μ1	μ2		θ
-M	μ1	2	0	1	-1	0	0	1	0		2/1=2
-M	μ2	12	0	18	0	-1	2/5	0	1		18/12=2/3 menor θ positivo
1	X1	3	1	-3	0	0	-1/10	0	0		---
Z_j		-14M+3	1	-19M-3	M	M	-2/5M-1/10	-M	-M		X=(3,0,0,0,0,2,12,0)
Z_j -C_j			0	-19M-11	M	M	-2/5M-1/10	0	0		Z= -14M+3

			C1	C2	C3	C4	C5	C6	
			1	8	0	0	0	-M	
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	μ1	θ
-M	μ1	4/3	0	0	-1	1/18	-1/45	1	24 menor θ positivo
8	X2	2/3	0	1	0	-1/18	1/45	0	----
1	X1	5	1	0	0	-1/6	-1/30	0	---
Z_j		-4/3M+31/3	1	8	M	-M/18-11/18	M/45+13/90		X=(5,2/3,0,0,0,4/3,0,0)
Z_j -C_j			0	0	M	-M/18-11/18	M/45+13/90	0	Z= -4/3M+31/3

C	X	B	C1	C2	C3	C4	C5	θ
			1	8	0	0	0	
			x1	x2	x3	x4	x5	
0	X4	24	0	0	-18	1	-2/45	---
8	X2	2	0	1	-1	0	0	----
1	X1	9	1	0	-3	0	-1/10	---
Z_j		25	1	8	-11	0	-1/10	X=(5,2/3,0,0,0,4/3,0,0)
Z_j -C_j			0	0	-11	0	-1/10	

Una vez eliminadas las variables artificiales, arribamos a esta tabla.
En ella aún quedan variables con Zj-Cj<0 (X3 y X5), o sea que pueden ingresar a la base y mejorar el valor del funcional, pero ningún tita correspondiente a esas variables es positivo.

En una tabla de simplex se reconoce un poliedro abierto porque se arriba a una tabla en la que hay variables que quieren entrar a la base, pero ninguna de las que está puede salir. (Todos los posibles pivotes son nulos o negativos)

Esto no quiere decir que el problema no tenga solución. El vértice en el que estamos ES una solución. Lo que no existe es **una** solución óptima, ya que para cualquier punto del poliedro, basta desplazarse hacia el sentido de crecimiento del funcional (a la derecha, en este caso) para mejorar el funcional.

INCOMPATIBLE
NO SE FORMA EL POLÍGONO DE SOLUCIONES FACTIBLES

$$\begin{cases} X1 + X2 \le 6 \\ 2\,X1 + X2 \le 1 \\ -\,X1 + 2\,X2 \ge 8 \end{cases}$$

$$Z(máx) = 3\,X1 + X2$$

$$\begin{cases} X1 + X2 + X3 = 6 \\ 2\,X1 + X2 + X4 = 1 \\ -\,X1 + 2\,X2 - X5 + \mu1 = 8 \end{cases}$$

$$Z(máx) = 3\,X1 + X2 + 0\,X3 + 0\,X4 + 0\,X5 - M\ \mu1$$

C	X	B	C1	C2	C3	C4	C5	C6	θ
			3	1	0	0	0	-M	
			x1	x2	x3	x4	x5	μ1	
0	X3	6	1	1	1	0	0	0	6/1=6
0	X4	1	2	1	0	1	0	0	1/2=0,5 menor θ positivo
-M	μ1	8	-1	2	0	0	-1	1	8/2=4
Z_j		-8M	M	-2M	0	0	M	-M	X=(0,0,6,1,0,8)
Z_j -C_j			M-3	-2M-1	0	0	M	0	Z= -8M

C	X	B	C1 3 x1	C2 1 x2	C3 0 x3	C4 0 x4	C5 0 x5	C6 -M μ1	θ	
0	X3	5	-1	0	1	-1	0	0	6/1=6	
1	X2	1	2	1	0	1	0	0	1/2=0,5	menor θ positivo
-M	μ1	6	-5	0	0	-2	-1	1	8/2=4	
Z_j		-6M+1	5M+2	1	0	2M+1	M	-M	X=(0,1,5,0,0,6)	
$Z_j - C_j$			5M-1	0	0	2M+1	M	0	Z = -6M +1	

Aquí llegamos a un punto en el que la tabla aparentemente es óptima (Todos los Zj-Cj son positivos) pero queda en la base la variable artificial μ1. Como habíamos dicho antes, esta variable no tiene significado, y si tiene valor distinto de cero, significa que el punto hallado no cumple con la restricción que incluía la variable artificial (- X1 + 2 X2 - X5 = 8). En efecto, con los valores que nos da la tabla, obtenemos: - X1 + 2 X2 = 2. Eso quiere decir que el punto hallado no pertenece al poliedro de soluciones del problema. Sin embargo, esta es la mejor solución a la que puede llegar el simplex. Eso significa que no hay ninguna solución real para el problema planteado.

En una tabla de simplex se reconoce un problema incompatible porque se llega a una tabla aparentemente óptima (Todos los Zj-Cj son positivos en problema de máximo o negativos en un problema de mínimo) y aún quedan variables artificiales en la base.

Viendo el gráfico, podemos comprobar que no hay ningún punto que satisfaga las tres inecuaciones simultáneamente, es decir no se puede armar un polígono de soluciones factibles.