# <u>Análisis de sensibilidad</u>

Dado el ejemplo de PL:

Un pastelero tiene 150 kg de harina, 44 kg de azúcar y 27,5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P y Q. Para hacer una docena de pasteles de tipo P necesita 3 kg de harina, 2 kg de azúcar y 1 de mantequilla y para hacer una docena de tipo Q necesita 6 kg de harina, 1kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Si tiene que satisfacer una demanda mínima de 2 docenas de tipo P y no superar las 20 docenas y el beneficio que obtiene por una docena de tipo P es \$20 y por una docena de tipo Q es \$30.
Hallar, el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo

<u>Planteo:</u>

$$\textbf{Max de } f(p,q) = \$20 \cdot p + \$30 \cdot q$$

**Sujeto a las restricciones:**

$$\begin{cases} 3p + 6q \leq 150 \\ 2p + 1q \leq 44 \\ 1p + 1q \leq 27{,}5 \\ p \geq 2 \\ p \leq 20 \\ p \geq 0 \; ; \; q \geq 0 \end{cases}$$

Se ha resulto el problema encontrando que la solución es fabricar 5 docenas de pasteles tipo P; 22,5 docenas de pasteles tipo Q y que se obtiene un beneficio de \$775

P= 5 ;  Q= 22,5 con un valor de Z=\$775

Una cuestión muy interesante para el fabricante es poder responder la siguientes preguntas ¿Si modifico algunos datos como las ganancias o costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o las disponibilidades de los recursos (términos independientes de las restricciones). Cómo impactará en la solución óptima encontrada?

**Hacer este estudio es lo que se denomina 'estudio de sensibilidad'**

Este análisis consiste en determinar **qué tan sensible** es la respuesta óptima frente a los cambios de los bi y  los cj del problema.

En este ejemplo el análisis de los términos independientes será :

¿Puedo mejorar mi beneficio si modifico la disponibilidad de los Kg de azucar , y si es así, en cuánto varía por cada unidad que lo modifique? . Análogamente podemos pensarlo para la segunda y tercera restricción.

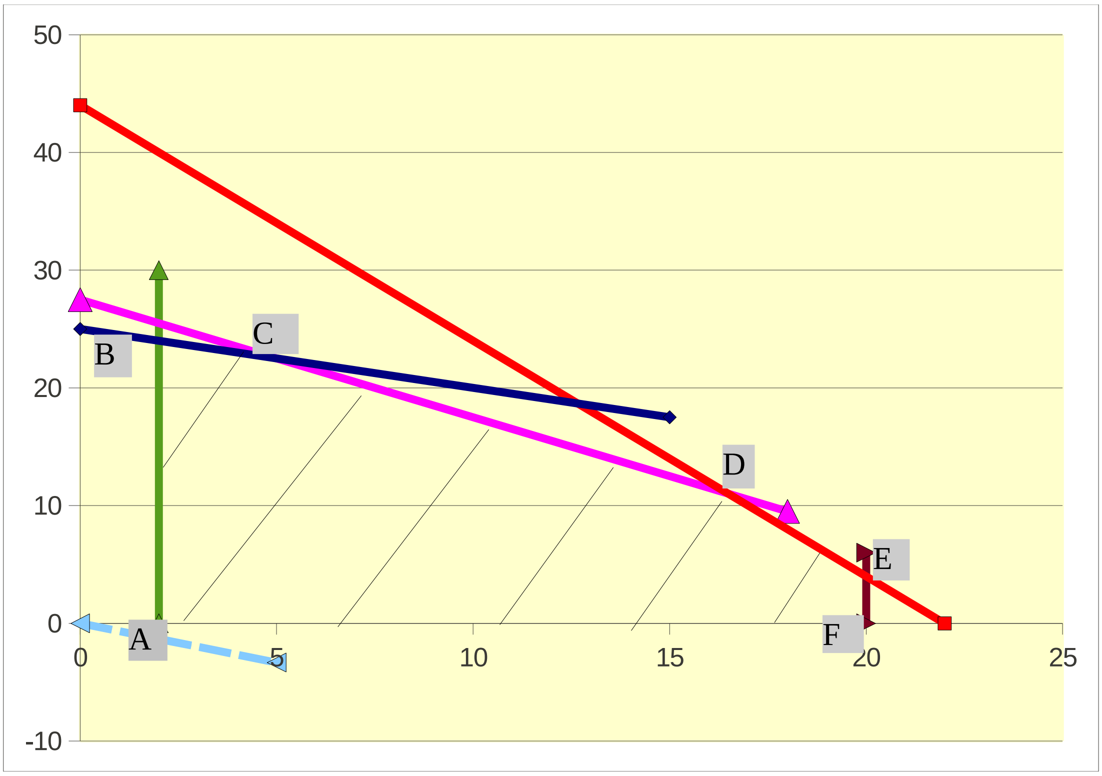
Resolver estas cuestiones es hacer **estudio de sensibilidad** y en particular cuando se efectúa sobre las restricciones(los coeficientes bi) los valores que proporcionan esta información se denominan **precio sombra**

Cuando resolvemos un problema de programación lineal, **el algoritmo del simplex o el SOLVER me permiten hallar estos valores**.

**Definición de Precio Sombra:** **Los valores de los precio sombra nos indican el orden del beneficio o no que se puede obtener de modificar en 1 unidad el valor bj de cada inecuación.**

**IMPORTANTE:** La variación en estos datos del problema se analizará individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de la solución debido a la modificación tomando de a uno de los coeficientes a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración alguna. Esto es importante porque estamos resolviendo un estudio de sensibilidad que es estático y no dinámico, pues solo contempla el cambio de un dato a la vez y no el de varios simultáneos.

## Se muestra el ejemplo de análisis de sensibilidad en forma gráfica para explicitar el concepto:




Se modifica y en cuánto si cambio la disponibilidad de la materia prima HARINA en 1 unidad, es decir 1Kg ? Si tengo 151 Kg de Harina ¿ mejora el beneficio y en cuánto?

modificamos $3\,p + 6\,q \leq 150$

por $3\,p + 6\,q \leq 151$

¿vale la pena tener inmovilizado dinero para comprar más Harina ?

La solución gráfica nos permite hacer este análisis

La solución óptima es en el punto C y en ese punto la FO alcanza su máximo valor

Z= $775

Vemos que este vértice es la intersección de la restricción 1(recta azul) y la restricción 3(recta rosa).

Si desplazamos la recta azul(restricción 1) en forma paralela pues el recurso de harina aumenta y en lugar de ser 150kg es de 151kg, modificará la solución óptima pues el vértice C del polígono se traslada, entonces podemos afirmar que cambiará el beneficio es decir el valor de la Función Objetivo.

De esta manera puedo responder que **modifica el valor del funcional** y por lo tanto el precio sombra de b1 será distinto de cero

Esto obliga a recalcular el punto de intersección y por lo tanto el valor z para este nuevo valor de C .

En cambio si modifico la disponibilidad de azucar en 1 unidad, en el polígono se traslada la restricción 2( recta roja). El óptimo, que se encuentra en el vértice C no sufre ninguna variación.

Entonces puedo responder que **NO modifica el valor del funcional** y por lo tanto el precio sombra de b2 es cero .

El mismo análisis puedo realizar para cada restricción del problema.

## IMPORTANTE:

Este análisis gráfico permite determinar los precio sombra que son cero y cuáles son distintos de cero pero **no me permite obtener el intervalo en que podemos modificar dichos términos independientes para que el óptimo se mantenga en el vértice solución,** en nuestro ejemplo será hallar el intervalo para b1 y también para b3.

**Para esta cuestiones y también para los casos de problemas de más de dos variables es necesario utilizar el SIMPLEX**

## Análisis de sensibilidad para los precio sombra utilizando el SIMPLEX:

En el apunte **Programación Lineal** se desarrollo el método simplex para este ejemplo.

En el último paso en la fila de los Zj- Cj correspondientes a las columnas de la variables flojas se encuentran los precio sombra de cada restricción.

| c | base | p | q | x1 | x2 | x3 | x4 | x5 | λ1 | b | θ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | **q** | 0 | 1 | (1/3) | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 22,5 | |
| 0 | **x2** | 0 | 0 | (1/3) | 1 | -3 | 0 | 0 | 0 | 11,5 | |
| 0 | **x4** | 0 | 0 | (-1/3) | 0 | 2 | 1 | 0 | -1 | 3 | |
| 20 | **p** | 1 | 0 | (-1/3) | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 5 | |
| 0 | **x5** | 0 | 0 | (1/3) | 0 | -2 | 0 | 1 | 0 | 15 | |
| **$Z_{j}-c_{j}$** | | 0 | 0 | (10/3) | 0 | 10 | 0 | 0 | M | **775** | |
| | **precio sombra** | | | (10/3) | 0 | 10 | 0 | 0 | | | |
| | | | | | | | | | | | |

por ser todos los $Z_{j}-c_{j}$ positivos este es el último pas

X= ( 5 ;22,5 ; 0 ; 11,5 ; 0 ; 3 ; 15)

**se corresponden con las variables flojas del primal**

Asi podemos decir que el precio sombra de la restricción 1 es 10/3, es decir que si:

modificamos $3p + 6q \leq 150$

por $3p + 6q \leq 151$

el valor del funcional Z= 775 será de Z=775 + 10/3

Si modificamos la segunda restricción en una unidad, es decir:

modificamos $2p + q \leq 44$

por $2p + q \leq 45$

el valor de Z = 775 permanecerá igual pues el precio sombra de b2 es =0

Si modificamos la tercer restricción en una unidad, es decir:

modificamos $p + q \leq 27{,}5$

por $p + q \leq 28{,}5$

el valor de Z = 775 aumentará en 10 unidades, es decir z= 785 pues el precio sombra de b3 es =10.

Si modifico la restricción 4: $p \geq 2$ no se modifica Z pues el precio sombra es cero

Si modifico la restricción 5: $p \leq 20$ no se modifica Z pues el precio sombra es cero

Para completar el estudio se debe calcular el intervalo donde el precio sombra de b1 puede modificarse pero que no deforme el polígono pues en ese caso puede ser que el máximo no se encuentre en el vértice C. De la misma manera se debe efectuar el cálculo del intervalo para el precio sombra de b3

Estos cálculos se muestran en un ejemplo desarrollado el archivo

***ejemplo precio sombra sensibilidad para b.ods***

## Estudio de sensibilidad para c

Para hacer un **análisis de sensibilidad de los coeficientes ci** en forma gráfica nos debemos preguntar qué significa modificar el valor 20 ( o en el otro caso 30) en la función objetivo.

Si para representar la FO en el origen hacemos Z =0; así encontrar la pendiente de esta recta resulta que la pendiente es m= -20/30= -2/3

Luego modificar por ejemplo el valor 20 modificará la pendiente. Esto puede llevar que si la FO es una recta con otra pendiente el máximo puede estar en otro vértice distinto del C.

**Hacer un estudio de sensibilidad de estos coeficientes (ci) es analizar hasta donde la pendiente de esta recta puede cambiar y el óptimo continúa siendo el vértice C**

Para hacer un estudio de sensibilidad de estos coeficientes y encontrar el intervalo de cada uno de ellos revisar el ejemplo: ***ejemplo sensibilidad para c.ods***