VARIABLES ARTIFICIALES

Si tratamos de resolver un simplex en el caso de máxima o mínima donde todas las restricciones son de menor o igual (≤) con todos los términos independientes positivos (b_j), hemos visto que convertir las desigualdades en igualdades es necesario ingresar las variables de holgura, para este caso siempre suman entonces en nuestra primer tabla del simplex tendremos una primer solución básica factible para iniciar el proceso iterativo.
Ahora veremos cómo hacer cuando esto no es así.
Veamos el siguiente ejercicio:
Hallar el máximo de Z sujeto a las siguientes restricciones :

$$\begin{cases} 6\,X1 + 5\,X2 \leq 30 \\ X2 \geq 1 \\ -2\,X1 + 2\,X2 \leq 6 \end{cases}$$

$$Z(\text{máx}) = 5\,X1 + 8\,X2$$

Lo primero que debemos hacer es transformar las inecuaciones en igualdades. Para lograr esto, se debe agregar una variable adicional (llamada slack, holgura o floja) que indica cuánto le falta a la suma algebraica que contiene a las variables reales (X1 y X2) para alcanzar el valor del término independiente (En este caso 30 y 6). En las restricciones de mayor o igual, la variable slack se debe restar para alcanzar el valor de la igualdad. El problema quedaría expresado como:

$$\begin{cases} 6\,X1 + 5\,X2 + X3 = 30 \\ X2 - X4 = 1 \\ -2\,X1 + 2\,X2 + X5 = 6 \end{cases}$$

$$Z(\text{máx}) = 5\,X1 + 8\,X2 + 0\,X3 + 0\,X4 + 0\,X5$$

Para armar la tabla inicial, debemos encontrar tres variables cuyos coeficientes en la tabla inicial formen la base canónica ([1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]). Dos de esas variables pueden ser las slacks X3 y X5. Pero no podemos utilizar X4, ya que sus coeficientes son [0,-1,0] y no [0,1,0].
Entonces debemos agregar una variable que sólo aparezca sumando en la segunda ecuación que quedaría expresada como:

$$X2 - X4 + \mu 1 = 1$$

La presencia de esta variable implica que X2 pueda tomar un valor menor que uno (0,5 - 0 + 0,5 = 1 cumple la igualdad), algo que viola claramente la segunda restricción del problema.
Esta variable se llama variable artificial, y debe llevarse su valor a cero para arribar a una solución factible. Para disminuir su valor, agregamos la variable artificial restando en el funcional pero multiplicada por una constante muy grande. (Se resta porque es un problema de maximización. Si fuera una minimización, esta constante deberá sumarse). De esta forma, el funcional tratará de reducir a cero el valor de μ1.

El problema completo, listo para armar la tabla inicial queda:

$$\begin{cases} 6\,X1 + 5\,X2 + X3 = 30 \\ X2 - X4 + \mu 1 = 1 \\ -2\,X1 + 2\,X2 + X5 = 6 \end{cases}$$

$$Z(\text{máx}) = 5\,X1 + 8\,X2 + 0\,X3 + 0\,X4 + 0\,X5 - M\,\mu 1$$

En un problema con restricciones de ≥ se debe agregar una variable artificial por cada restricción de este tipo, para poder formar la base canónica.
La tabla inicial se arma:

			C1	C2	C3	C4	C5	C6		
			5	8	0	0	0	-M		
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	μ1	θ	
0	x3	30	6	5	1	0	0	0	30/5=6	
-M	μ1	1	0	1	0	-1	0	1	1/1=1	menor θ positivo
0	x5	6	-2	2	0	0	1	0	6/2=3	
	Z_j	-1M	0	-1M	0	M	0	-M		
	$Z_j - C_j$		-5	-1M-8	0	M	0	0		

Debemos hacer ingresar a la base a la variable con el Zj-Cj negativo de mayor valor absoluto. (Porque estamos maximizando, si estuviéramos minimizando deberíamos elegir el positivo de mayor valor absoluto) Esto es, X2, ya que M es superior a cualquier otro valor. Es razonable que el simplex elija X2, ya que es la única variable que al aumentar hará disminuir el valor de μ1 (Es la única con un valor positivo en la fila de μ1), y μ1 es la variable que más afecta al funcional. Al calcular los titas, vemos que la variable que sale es μ1 (Podría ser cualquier otra).

			5	8	0	0	0	-M		
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	μ1	θ	
0	x3	25	6	0	1	5	0	-5	25/5=5	
8	x2	1	0	1	0	-1	0	1	--	
0	x5	4	-2	0	0	2	1	-2	4/2=2	menor θ positivo
	Z_j	8	0	8	0	-8	0	8		
	$Z_j - C_j$		-5	0	0	-8	0	8+M		

Al llegar a esta segunda tabla, vemos dos cosas: La primera es que las columnas A4 y A6 tienen coeficientes con el mismo valor absoluto, pero distintos signos (ver columna A4 : 5, -1 ,2 y la columna A6: -5 , 1 , -2) . Esto sucede porque los coeficientes de las variables asociadas a estas columnas (X4 y μ1) en las restricciones iniciales del problema son iguales con signos opuestos; y seguirá ocurriendo lo mismo a lo largo de todo el desarrollo del problema.
El otro aspecto a resaltar es que el único lugar de la tabla en el que quedó la constante M es restando en el C6, o sea sumando en el Z6-C6. Si M está sumando aquí y su valor es mayor a cualquier otro coeficiente del problema, entonces Z6-C6 siempre será positivo, y μ1 nunca volverá a entrar en la base (o sea, a tener valor distinto de cero en la solución). Entonces podemos omitir esta columna a partir de la próxima tabla del problema, que sigue desarrollándose normalmente hasta alcanzar el óptimo.
Una vez que una variable artificial salió de la base, puedo estar seguro de que no volverá a entrar, por lo que se puede omitir su columna a partir de la próxima iteración.

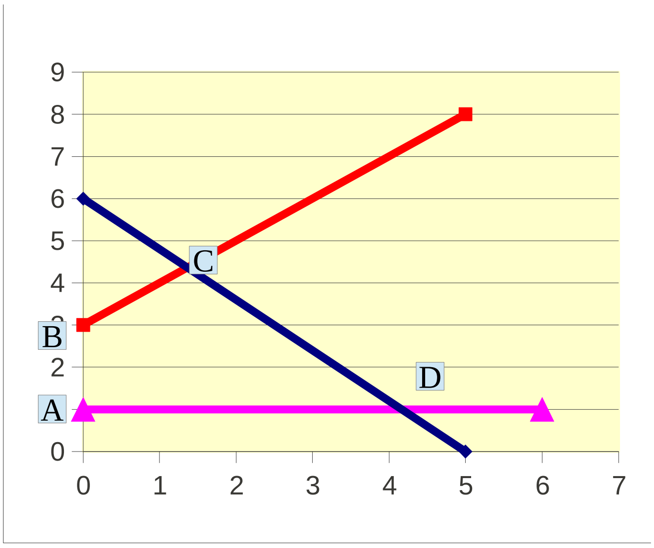
			5	8	0	0	0	-M			
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	µ1	θ		
0	x3	15	11	0	1	0	-5/2	--		15/11	menor θ positivo
8	x2	3	-1	1	0	0	1/2	--		--	
0	x4	2	-1	0	0	1	1/2	--		--	
	Z_j	24	-8	0	0	0	4	--			
	Z_j -C_j		-13	0	0	0	4				

			5	8	0	0	0	-M
C	X	B	x1	x2	x3	x4	x5	µ1
5	x1	15/11	1	0	1/11	0	-5/22	--
8	x2	48/11	0	1	1/11	0	3/11	--
0	x4	37/11	0	0	1/11	1	3/11	--
	Z_j	459/11	5	8	13/11	0	23/22	--

La solución óptima consiste en X1= 15/11 ; X2= 48/11 . La ganancia total es de 41,72$.

Esto es válido si el problema tiene alguna solución factible. La variable artificial que salió de la base podría volver a entrar si el problema no fuera factible. Ver apartado INCOMPATIBLE.

Resolución gráfica.



En la tabla inicial del problema, tenemos en la base a X3, µ1 y X5. Eso quiere decir que las demás variables (X1, X2 y X4) valen cero. En esa tabla, sobran 30 y 6 de cada restricción. Sin embargo vemos que no se cumple con la restricción (X2 ≥ 1), ya que X2 = 0. La diferencia entre el valor actual y el mínimo válido de la restricción (Cuánto “le falta” para cumplirla”) es el valor de µ1(1). Ahora bien, viendo el gráfico, vemos que no hay ningún punto del plano en que esto suceda (Particularmente, X2 y X4 nunca pueden ser cero simultáneamente).
Esto es porque en el punto en el que está esta tabla, µ1 tiene valor y eso, como dijimos, no tiene significado en el problema real. Al iterar a la segunda tabla, vemos que X1 y X4 valen cero, lo que quiere decir que estamos en el punto “A”, luego X4 toma valor y X5 pasa a valer cero (Punto “B”). Por último, ingresa a la base X1, reemplazando a X5. Esto sucede en el punto “C”, que es el óptimo.