

Análisis de sensibilidad

Dado el ejemplo de PL:

Un pastelero tiene 150 kg de harina, 44 kg de azúcar y 27,5 kg de mantequilla para hacer dos tipos de pasteles P y Q. Para hacer una docena de pasteles de tipo P necesita 3 kg de harina, 2 kg de azúcar y 1 de mantequilla y para hacer una docena de tipo Q necesita 6 kg de harina, 1kg de azúcar y 1 kg de mantequilla. Si tiene que satisfacer una demanda mínima de 2 docenas de tipo P y no superar las 20 docenas y el beneficio que obtiene por una docena de tipo P es \$20 y por una docena de tipo Q es \$30.

Hallar, el número de docenas que tiene que hacer de cada clase para que el beneficio sea máximo

Planteo:

$$\text{Max de } f(p,q) = \$20 \cdot p + \$30 \cdot q$$

Sujeto a las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3p + 6q \leq 150 \\ 2p + 1q \leq 44 \\ 1p + 1q \leq 27,5 \\ p \geq 2 \\ p \leq 20 \\ p \geq 0 ; q \geq 0 \end{array} \right.$$

Se ha resuelto el problema encontrando que la solución es fabricar 5 docenas de pasteles tipo P; 22,5 docenas de pasteles tipo Q y que se obtiene un beneficio de \$775

$$P= 5 ; Q= 22,5 \text{ con un valor de } Z=\$775$$

Una cuestión muy interesante para el fabricante es poder responder la siguientes preguntas ¿Si modifico algunos datos como las ganancias o costos unitarios (coeficientes de la función objetivo) o las disponibilidades de los recursos (términos independientes de las restricciones). Cómo impactará en la solución óptima encontrada?

Hacer este estudio es lo que se denomina 'estudio de sensibilidad'

Este análisis consiste en determinar **qué tan sensible** es la respuesta óptima frente a los cambios de los b_i y los c_j del problema.

En este ejemplo el análisis de los términos independientes será :

¿Puedo mejorar mi beneficio si modifico la disponibilidad de los Kg de azúcar , y si es así, en cuánto varía por cada unidad que lo modifique? . Análogamente podemos pensarlo para la segunda y tercera restricción.

Resolver estas cuestiones es hacer **estudio de sensibilidad** y en particular cuando se efectúa sobre las restricciones (los coeficientes b_i) los valores que proporcionan esta información se denominan **precio sombra**

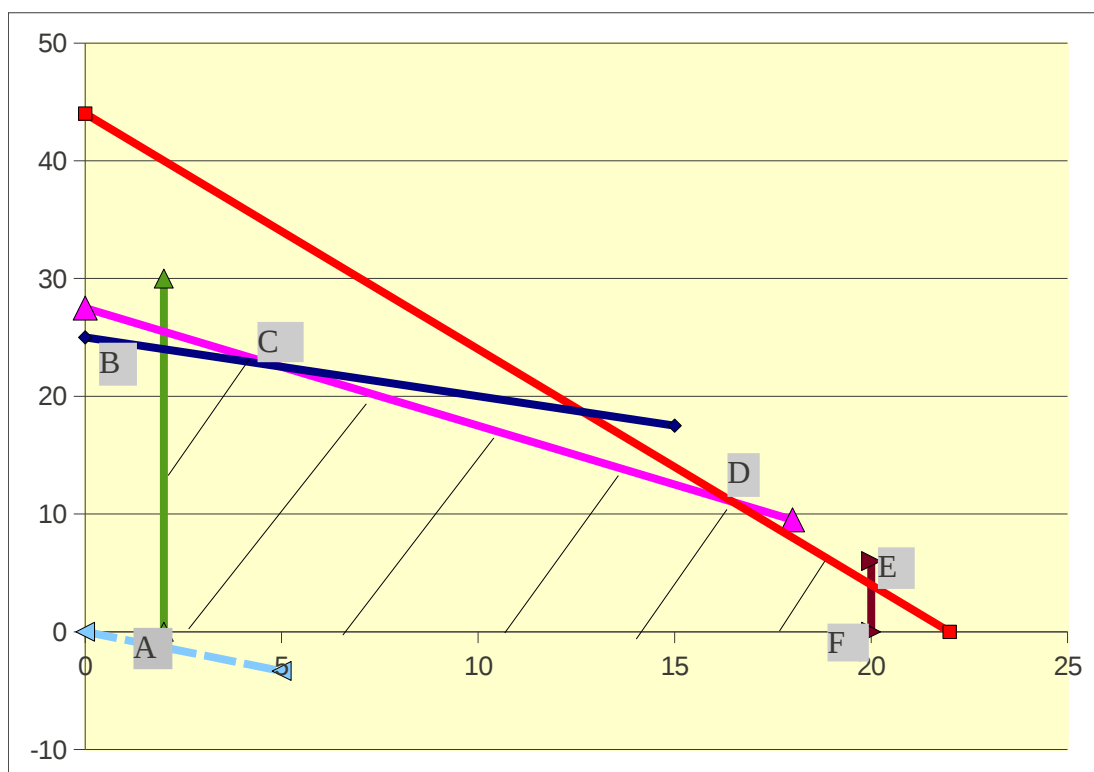
Cuando resolvemos un problema de programación lineal, **el algoritmo del simplex o el SOLVER me permiten hallar estos valores.**

Definición de Precio Sombra:

Los valores de los precio sombra nos indican el orden del beneficio o no que se puede obtener de modificar en 1 unidad el valor bj de cada inecuación.

IMPORTANTE: La variación en estos datos del problema se analizará individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de la solución debido a la modificación tomando de a uno de los coeficientes a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin alteración alguna. Esto es importante porque estamos resolviendo un estudio de sensibilidad que es estático y no dinámico, pues solo contempla el cambio de un dato a la vez y no el de varios simultáneos.

Se muestra el ejemplo de análisis de sensibilidad en forma gráfica para explicitar el concepto:



Se modifica y en cuánto si cambio la disponibilidad de la materia prima HARINA en 1 unidad, es decir 1Kg ? Si tengo 151 Kg de Harina ¿ mejora el beneficio y en cuánto?

modificamos $3p + 6q \leq 150$

por $3p + 6q \leq 151$

¿vale la pena tener inmovilizado dinero para comprar más Harina ?

La solución gráfica nos permite hacer este análisis

La solución óptima es en el punto C y en ese punto la FO alcanza su máximo valor

$$Z = \$775$$

Vemos que este vértice es la intersección de la restricción 1(recta azul) y la restricción 3(recta rosa).

Si desplazamos la recta azul(restricción 1) en forma paralela pues el recurso de harina aumenta y en lugar de ser 150kg es de 151kg, modificará la solución óptima pues el vértice C del polígono se traslada, entonces podemos afirmar que cambiará el beneficio es decir el valor de la Función Objetivo.

De esta manera puedo responder que **modifica el valor del funcional** y por lo tanto el precio sombra de b_1 será distinto de cero

Esto obliga a recalcular el punto de intersección y por lo tanto el valor z para este nuevo valor de C

En cambio si modifico la disponibilidad de azúcar en 1 unidad, en el polígono se traslada la restricción 2(recta roja). El óptimo, que se encuentra en el vértice C no sufre ninguna variación.

Entonces puedo responder que **NO modifica el valor del funcional** y por lo tanto el precio sombra de b_2 es cero .

El mismo análisis puedo realizar para cada restricción del problema.

Este análisis gráfico permite determinar los precios sombra que son cero y cuáles son distintos de cero pero **no me permite obtener el intervalo en que podemos modificar dichos términos independientes para que el óptimo se mantenga en el vértice solución**, en nuestro ejemplo será hallar el intervalo para b_1 y para b_3 .

Para hacer un **análisis de sensibilidad de los coeficientes c_i** en forma gráfica nos debemos preguntar qué significa modificar el valor 20 (o en el otro caso 30) en la función objetivo.

Si para representar la FO en el origen hacemos $Z = 0$; así encontrar la pendiente de esta recta resulta que la pendiente es $m = -20/30 = -2/3$

Luego modificar por ejemplo el valor 20 modificará la pendiente. Esto puede llevar que si la FO es una recta con otra pendiente el máximo puede estar en otro vértice distinto del C.

Hacer un estudio de sensibilidad de estos coeficientes (c_i) es analizar hasta donde la pendiente de esta recta puede cambiar y el óptimo continúa siendo el vértice C

Análisis de sensibilidad utilizando el simplex

Veamos un ejercicio que ha sido resuelto por ambos métodos, el gráfico y el simplex.

hallar el z (max) = $8 \cdot x_1 + 10 \cdot x_2$

sujeto a:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 600 \\ 4x_2 \leq 600 \\ 2x_1 + 4x_2 \leq 800 \end{cases}$$

Precio Sombra:

desarrollado en el archivo **'ejemplo precio sombra sensibilidad-para b.xls'**

Utilizando el simplex es posible determinar todos los precio sombra y obtener en particular para los que son diferentes de cero el intervalo para cada uno de ellos donde puede desplazarse el vértice manteniendo la condición de ser el óptimo.

'ejemplo precio sombra sensibilidad-para c.xls'

Análisis de sensibilidad para los c_j

Desarrollado en el archivo **'ejemplo sensibilidad-para c.xls'**