

Procesos y Máquinas Industriales II- Clase IX

Prof. Mariana Suarez

28 de septiembre de 2018

Plan de la clase

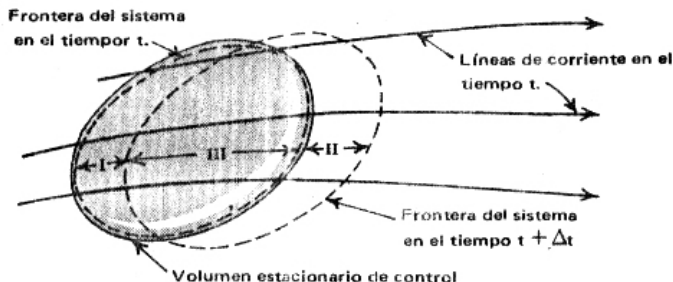
- ▶ Segunda ley de Newton del movimiento

Plan de la clase

- ▶ Segunda ley de Newton del movimiento
- ▶ Principio de conservación de la energía

Segunda ley de Newton del movimiento

La rapidez de cambio de momento de un sistema es igual a la fuerza neta que actúa sobre el sistema y ocurre en la dirección de la fuerza neta.



Segunda ley de Newton del movimiento (cont.)

En este caso, la Ley de Newton se escribe

$$\sum \bar{F} = \frac{d}{dt}(m\bar{v}) = \frac{d}{dt}\bar{P}$$

- ▶ Momento lineal del sistema en el tiempo $t + \Delta t$

$$\bar{P}]_{t+\Delta t} = \bar{P}_{II}]_{t+\Delta t} + \bar{P}_{III}]_{t+\Delta t}$$

- ▶ Momento lineal del sistema en el tiempo t

$$\bar{P}]_t = \bar{P}_I]_t + \bar{P}_{III}]_t$$

- ▶ Restando las expresiones anteriores y dividiendo por Δt

$$\frac{\bar{P}]_{t+\Delta t} - \bar{P}]_t}{\Delta t} = \frac{\bar{P}_{II}]_{t+\Delta t} + \bar{P}_{III}]_{t+\Delta t} - \bar{P}_I]_t - \bar{P}_{III}]_t}{\Delta t}$$

Segunda ley de Newton del movimiento (cont.)

- ▶ Tomando límite y reordenando

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{P}]_{t+\Delta t} - \bar{P}]_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_{III}]_{t+\Delta t} - \bar{P}_{III}]_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_{II}]_{t+\Delta t} - \bar{P}_{II}]_t}{\Delta t}$$

- ▶ Puede escribirse:

$$\frac{d}{dt} \bar{P} = \frac{d}{dt} \bar{P}_{III} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_{II}]_{t+\Delta t} - \bar{P}_{II}]_t}{\Delta t}$$

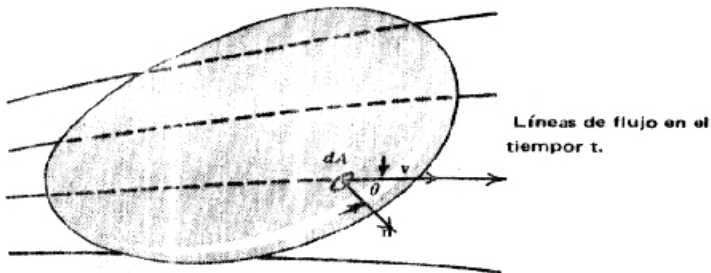
donde

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\bar{P}_{II}]_{t+\Delta t} - \bar{P}_{II}]_t}{\Delta t}$$

representa la rapidez neta de flujo de salida de momento a través de la sup. de control en el intervalo Δt

Segunda ley de Newton del movimiento(cont.)

Aplicación de la Ley de Newton a un volumen de control (VC)
en un campo de flujo de fluido



Segunda ley de Newton del movimiento(cont.)

- ▶ Fuerza total sobre el VC: $\Sigma \bar{F}$
- ▶ Rapidez de flujo de salida de momento:

$$\bar{v}(\rho v) \cos \theta dS = \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$$

- ▶ Flujo neto de salida de momento del VC

$$\int \int_S \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$$

Segunda ley de Newton del movimiento (cont.)

Se ve que

(rapidez del momento que sale del VC)- (rapidez del momento que entra al VC) = $\int \int_S \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$

✓ Rapidez de acumulación de momento lineal dentro del VC:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \bar{v} \rho dV$$

El equilibrio total de momento lineal para un VC se transforma en

$$\sum \bar{F} = \int \int_S \rho \bar{v}(\bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V \bar{v} \rho dV$$

Segunda ley de Newton del movimiento (cont.)

(Teorema del momento)

En coordenadas rectangulares, se puede escribir por las ec. escalares:

$$\begin{aligned}\sum F_x &= \int \int_S \rho v_x (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V v_x \rho dV \\ \sum F_y &= \int \int_S \rho v_y (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V v_y \rho dV \\ \sum F_z &= \int \int_S \rho v_z (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V v_z \rho dV\end{aligned}$$

Principio de conservación de la energía aplicado a fluidos en movimiento

Primera Ley de la Termodinámica

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

- ▶ Energía total del sistema en el tiempo $t + \Delta t$

$$E]_{t+\Delta t} = E_{II}]_{t+\Delta t} + E_{III}]_{t+\Delta t}$$

- ▶ Energía total del sistema en el tiempo t

$$E]_t = E_I]_t + E_{III}]_t$$

Principio de conservación de la energía aplicado a flúidos en movimiento

- ▶ Restando las expresiones anteriores y dividiendo por Δt

$$\frac{E]_{t+\Delta t} - E]_t}{\Delta t} = \frac{E_{II}]_{t+\Delta t} + E_{III}]_{t+\Delta t} - E_{I}]_t - E_{III}]_t}{\Delta t}$$

- ▶ Tomando límite y reordenando

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E]_{t+\Delta t} - E]_t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{III}]_{t+\Delta t} - E_{III}]_t}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{II}]_{t+\Delta t} - E_{II}]_t}{\Delta t}$$

Principio de conservación de la energía aplicado a fluidos en movimiento

► Puede escribirse:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE_{III}}{dt} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{II}]_{t+\Delta t} - E_I]_t}{\Delta t}$$

donde

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_{II}]_{t+\Delta t} - E_I]_t}{\Delta t}$$

representa la rapidez neta de la energía que sale a través de la sup. de control en el intervalo Δt

Principio de conservación de la energía aplicado a fluidos en movimiento

Aplicación de la Primera Ley de la Termodinámica a un VC en un campo de flujo de fluido

- ▶ Rapidez de aumento del calor del VC y trabajo realizado:

$$\frac{\delta Q}{dt} \text{ y } \frac{\delta W}{dt}$$

- ▶ Rapidez de flujo de salida de energía:

$$e(\rho v) \cos \theta dS = e \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$$

- ▶ Flujo neto de salida de la energía del VC

$$\int \int_S e \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$$

Principio de conservación de la energía aplicado a flúidos en movimiento

Se ve que

(rapidez de energía que sale del VC) - (rapidez de energía que entra al VC) = $\int \int_S e \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS$

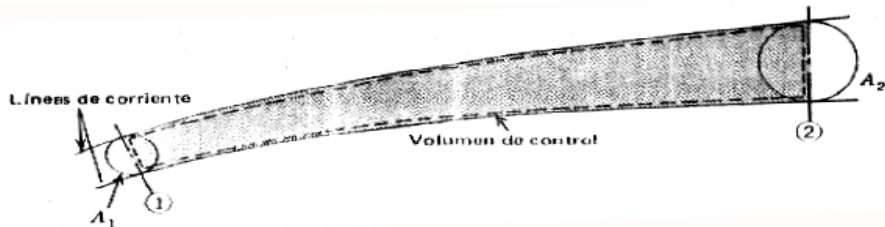
✓ Rapidez de acumulación de energía dentro del VC:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V e \rho dV$$

La Primera Ley de la Termodinámica aplicada al VC puede escribirse entonces:

$$\frac{\delta Q}{dt} - \frac{\delta W}{dt} = \int \int_S e \rho (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS + \frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V e \rho dV$$

Un caso especial: La ecuación de Bernoulli



Flujo permanente, incompresible, no viscoso, sin transferencia de calor ni variación de energía interna.

$$\frac{\delta Q}{dt} = 0 \quad \frac{\delta W}{dt} = 0$$

Un caso especial: La ecuación de Bernoulli (cont.)

$$\begin{aligned}
 & \int \int_S \rho \left(e + \frac{P}{\rho} \right) (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS = \\
 & \int \int_{S_1} \rho \left(e + \frac{P}{\rho} \right) (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS, + \int \int_{S_2} \rho \left(e + \frac{P}{\rho} \right) (\bar{v} \cdot \bar{n}) dS = \\
 & = \left(gh_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1} \right) (-\rho_1 v_1 S_1) + \left(gh_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2} \right) (\rho_2 v_2 S_2)
 \end{aligned}$$

Además

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \int \int_V e \rho dV = 0$$

Un caso especial: La ecuación de Bernoulli (cont.)

La Primera Ley queda

$$\left(gh_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho_1}\right)(-\rho_1 v_1 S_1) + \left(gh_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho_2}\right)(\rho_2 v_2 S_2) = 0$$

Por la ec. de continuidad, $\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$

Dividiendo y teniendo en cuenta $\rho = \text{cte.}$ se obtiene la

Ecuación de Bernoulli

$$\left(gh_1 + \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho}\right) = \left(gh_2 + \frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho}\right)$$

$$\left(h_1 + \frac{v_1^2}{2g} + \frac{P_1}{\rho g}\right) = \left(h_2 + \frac{v_2^2}{2g} + \frac{P_2}{\rho g}\right)$$